

Министерство образования и науки Карачаево-Черкесской Республики

Отдел образования Хабезского муниципального района

МБОУ " СОШ а.Псаучье-Дахе имени Героя России О.М. Карданова"

РАССМОТРЕНО

Руководитель МО

 **Урумсева Е.И.**

от «28» 08 2023 г.

СОГЛАСОВАНО

**Заместитель
директора по УР**

 **Бабиева Ф.Ш.**
от «29» 08 2023 г.

УТВЕРЖДЕНО

И.о. директора

 **Кубанова А.М.**

от «31» 08 2023 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
ПО УЧЕБНОМУ КУРСУ
« МАТЕМАТИКА: РЕШЕНИЕ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ»
10 КЛАСС
БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ
НА 2023-2024 УЧЕБНЫЙ ГОД**

а. Псаучье- Дахе 2023

Пояснительная записка

Значение математической подготовки в становлении современного человека определяет следующие общие цели школьного математического образования:

- овладение конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, для изучения смежных дисциплин, для продолжения образования;
- интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых человеку для полноценной жизни в обществе;
- формирование представлений об идеях и методах математики, о математике как форме описания и методе познания действительности;
- формирование представлений о значимости математики как части общечеловеческой культуры в развитии цивилизации и в современном обществе

Реализация этих целей на старшей ступени школы дифференцируется в зависимости от направленности интересов ученика. Это позволяет переориентировать систему обучения математике, сделав ее современной и отвечающей новым психолого-педагогическим воззрениям.

Классы: 10

Тип элективного курса: предметный курс , имеющий временное согласование с данным учебным предметом

Количество часов в неделю: 1 час

Образовательная область: математика

Цель курса: углубление и расширение знаний по математике, развитие логического мышления и познавательного интереса

Основные задачи:

- подготовить учащихся к итоговой аттестации в форме ЕГЭ;
- научить решать нестандартные задачи;
- научить различным приемам, помогающим успешно справиться с заданиями ЕГЭ;
- расширить представления учащихся о математике как науке.

Принцип построения программы: от простого к сложному. Применяется технология модульного обучения. На первом этапе идет изучение нового материала, на втором – рассмотрение теоретических вопросов и задач, которые вызвали наибольшие затруднения - «урок общения», на третьем – закрепление, на четвертом – контроль. Особенностью является то, что больше времени учащиеся работают в группах, где обязательно есть более сильный ученик. По мере необходимости состав групп может меняться в соответствии с интересами и запросами учащихся. Желательно занятия проводить парами. Если нет такой возможности, то материал (теоретический и практический) каждого занятия можно разделить на две части.

Особенности: большую роль в обучении должны сыграть современные информационные технологии и информационные системы. Учащимся будут предложены разные формы познавательной и исследовательской деятельности, итогом которых станет образовательный продукт: доклад, реферат, проект, публикация.

Планируемые результаты:

- овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения естественнонаучных дисциплин, продолжения образования и освоения избранной специальности на современном уровне;
- развитие логического мышления, алгоритмической культуры, математического мышления и интуиции, необходимых для продолжения образования и для самостоятельной деятельности в области математики и ее приложениях в будущей профессиональной деятельности;
- овладение навыками компетентности личности в сфере самостоятельной познавательной деятельности, в социально- трудовой и бытовой сфере;
- формирование навыков самообразования, критического мышления, самоорганизации и самоконтроля, работы в команде, умения находить, формулировать и решать проблемы.

Система оценки достижений учащихся: административной проверки материала курса не предполагается. Соответствующие задания могут включаться в административные проверочные работы, выноситься на экзамены,

но только в качестве дополнительных заданий. В технологии проведения занятий присутствует элемент перекрестной и самопроверки, который предоставляет учащимся возможность самим проверить, как ими усвоен изученный материал. По окончании каждой темы, ученик заполняет индивидуальный лист контроля. Формой итогового контроля может стать защита реферата, проекта, создание публикации, а также – хорошие результаты на ежегодных районных олимпиадах.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

№ модуля	Тема и содержание	Количество часов	Форма контроля
1	Рациональные уравнения и неравенства Разложение на множители. Подстановки при решении рациональных уравнений. Деление многочлена на многочлен. Рациональные корни многочлена. Искусственные приемы при решении рациональных уравнений (выделение полного квадрата, однородные уравнения, использование монотонности функции, сравнение множеств значений). Рациональные уравнения с модулем. Рациональные неравенства высших степеней. Дробно-рациональные неравенства. Неравенства с модулем.	12	Математический бой
2	Иррациональные уравнения и неравенства Введение новой переменной при решении иррациональных уравнений. Иррациональные уравнения, содержащие кубические радикалы. Искусственные приемы при решении иррациональных уравнений. Иррациональные неравенства. Параметры. Общие методы решения уравнений с параметрами. Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами	11	Самостоятельное решение конкурсных задач
3	Тригонометрические уравнения и неравенства Общий прием. Уравнения, решаемые понижением степени. Универсальная подстановка. Однородные уравнения и приводимые к ним. Способ подстановки. Введение вспомогательного угла. Искусственные приемы при решении тригонометрических уравнений. Тригонометрические неравенства. Тригонометрические уравнения с параметрами и модулями	10	Самостоятельное решение конкурсных задач
4	Итоговое занятие	1	

Учебно-методическое обеспечение.

1. Алексеев И. Г. Математика. Подготовка к ЕГЭ: Учебно–методическое пособие. – Саратов: Лицей, 2004, 112 с.

2. Бродский И. Л. Решение экзаменационных заданий повышенной сложности по алгебре и началам анализа за курс средней школы: Пособие для учащихся. – М.: АРКТИ, 2001, 72 с. (Методическая библиотека).

3. Виленкин Н. Я. И др. Алгебра: Учебное пособие для 10-11 классов средних школ с математической специализацией.- 2-е изд., М.: «Просвещение», 1999, 302 стр.

4. Дорофеев Г. В., Муравин Г. К., Седова Е. А. Сборник заданий для подготовки и проведения письменного экзамена по математике (курс А) и алгебре и началам анализа (курс Б) за курс средней школы. 11 класс: Экспериментальное пособие. – 4-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2001, 160 с.: ил.

5. Зорин В. В. Пособие по математике для поступающих в вузы. – 2-е изд., М.: «Высшая школа», 1969, 264 с.

6. Перегудов А. Б. и др. Математика. Материалы для подготовки к вступительному компьютерному экзамену в СГТУ: Учебное пособие. Саратов: саратовский гос. Техн. Ун-т, 2004, 88 с.

7. Письменный Д. Т. Готовимся к письменному экзамену по математике. – 5-е изд., испр. и доп.- М.6 Рольф, 1999. – 288 с. с ил.- (Домашний репетитор)

8. Сборник задач по математике для поступающих во втузы: Учебное пособие/ В.К. Егерев и др.; Под ред. М.И. Сканави. – 6-е изд., стер. – М.6 Высш. шк., 1993, 528 с.: ил.

9. Студенецкая В. Н., Гребнева З. С. Решение задач и выполнение заданий с комментариями и ответами для подготовки к единому государственному экзамену. Часть 1.- Волгоград: Учитель, 2003, 105 с.

10. Сухоруков В. И. и др. Математика для поступающих в БГПИ/ сборник конкурсных задач. – Балашов: Издательство БГПИ, 1995, 112 с.

11. Единый Государственный Экзамен по математике (информационный сборник для учителей математики и учащихся общеобразовательных школ). Издательство СарИПКиПРО, 2004, 56 с.

12. Тесты. Математика 11класс. Варианты и ответы централизованного тестирования. – М.: Центр тестирования МО РФ, 2003.

13. Пособие по математике: Для поступающих в Саратовский государственный социально – экономический университет / Сост. Бабин Ю. Я. И др. – Саратов: СГСЭУ, 2001, 124 с.

14. Рурукин А. Н. Пособие для интенсивной подготовки к выпускному, вступительному экзаменам и ЕГЭ по математике. – М.: ВАКО, 2004, 248с.- (Интенсив).

15. Колягин М. Ю. Алгебра и начала анализа. 10 класс.: Учебник для общеобразовательных учреждений. - М.: Мнемозина, 2001, 364 с.

Календарно-тематическое планирование

§	Тема	Кол -во часо в	Дата по плану	Дата фактиче ски	Приложение
1 модуль – 5 часов					
	Рациональные уравнения и неравенства	12			
1	Разложение на множители.	1	02.09.		
2	Подстановки при решении рациональных уравнений.	1	09.09		
3	Деление многочлена на многочлен.	1	16.09		
4	Рациональные корни многочлена.	1	23.09		
5	Искусственные приемы при решении рациональных уравнений (выделение полного квадрата).	1	30.09		
2 модуль – 5 часов					
6	Искусственные приемы при решении рациональных уравнений (однородные уравнения).	1	07.10		
7	Искусственные приемы при решении рациональных уравнений (использование монотонности функции, сравнение множеств значений).	1	14.10		
8	Рациональные уравнения с модулем.	1	21.10		
9	Рациональные неравенства высших степеней.	1	28.11		
10	Дробно-рациональные неравенства.	1	11.11		
3 модуль – 5 часов					
11	Неравенства с модулем.	1			
12	Неравенства с модулем.	1	18.11		
	Иррациональные уравнения и неравенства	11			
13	Введение новой переменной при решении иррациональных уравнений	1	25.11		
14	Введение новой переменной при решении иррациональных уравнений	1	02.12		
15	Иррациональные уравнения, содержащие кубические радикалы.	1	09.12		
4 модуль - 6 часов					
16	Искусственные приемы при решении иррациональных уравнений.	1	16.12		
17	Искусственные приемы при решении иррациональных уравнений.	1	23.12		
18	Искусственные приемы при решении иррациональных уравнений.	1	13.01		
19	Иррациональные неравенства.	1	20.01		

20	Иррациональные неравенства.	1	27.01		
21	Параметры. Общие методы решения уравнений с параметрами.	1	03.02		
5 модуль – 5 часов					
22	Параметры. Общие методы решения уравнений с параметрами.	1	10.02		
23	Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами	1	17.02		
	Тригонометрические уравнения и неравенства	10			
24	Общий прием.	1	24.02		
25	Уравнения, решаемые понижением степени.	1	02.03		
6 модуль – 7 часов					
26	Универсальная подстановка.	1	09.03		
27	Однородные уравнения и приводимые к ним.	1	16.03		
28	Способ подстановки.	1	23.03		
29	Введение вспомогательного угла.	1	06.05		
30	Искусственные приемы при решении тригонометрических уравнений.	1	13.05		
31 32	Тригонометрические неравенства.	1	20.05		
33 34	Тригонометрические уравнения с параметрами и модулями	1	25.05		

Методические рекомендации

(Урок 1-2)

Цель: систематизировать и обобщить знания, полученные в основной школе. Продолжить формирование навыков использования методов подстановки и подбора при решении рациональных уравнений.

Теоретическая часть. Определение: под рациональным уравнением принято понимать уравнение, которое может быть записано в виде $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$,

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ – заданные числа, а x – неизвестное.

Основные методы решения рациональных уравнений

1. *Простейшие:* решаются путем обычных упрощений – приведение к общему знаменателю, приведение подобных членов и т. д. Квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ решаются по готовой формуле корней квадратного уравнения или по теореме Виета, которые известны из курса основной школы.
2. *Группировка:* путем группировки слагаемых, применения формул сокращенного умножения привести (если удастся) уравнение к виду, когда слева записано произведение нескольких сомножителей, а справа – ноль. Затем приравниваем к нулю каждый из сомножителей. Этот метод чаще называют - разложение на множители.
3. *Подстановка:* ищем в уравнении некоторое повторяющееся выражение, которое обозначим новой переменной, тем самым упрощая вид уравнения. В некоторых случаях очевидно что удобно обозначить. В более сложных случаях подстановка видна лишь после преобразований. В ряде случаев удобную подстановку желательно знать «заранее».

1) Уравнение $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$ сводится к биквадратному, если сделать

подстановку $\tilde{a} = t - \frac{a+b}{2}$. Необходимо дать формулу

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4.$$

2) Симметрическое уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$
 (коэффициенты членов, равноотстоящих от концов, равны) решается с
 помощью подстановки $x + \frac{1}{x} = t$,

если n – четное; если n – нечетное, то уравнение имеет корень $x = -1$.

3) Уравнение вида $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = f$ сводится к квадратному,
 если

$$a + b = c + d \text{ и т. д.}$$

4. *Подбор*: при решении уравнений высших степеней рациональные корни
 уравнения $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$, ищем в виде $\frac{p}{q}$, где p – делитель a_0 , q
 делитель a_n , причем p и q взаимно просты, p – целое число, q – натуральное.

Практическая часть. Так как решение квадратных уравнений не вызывает
 особых трудностей и им уделяется достаточно времени на уроках, то эти
 уравнения можно не рассматривать. Рассматривается по одному примеру
 каждого типа, например:

Пример 1. Решите уравнение $\frac{3}{x+2} - \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2x+1}{x^2+3x+2}$.

Решение. Разложим на множители знаменатель дроби, стоящей в правой части
 уравнения, и приведем дроби к общему знаменателю, $(x+1)(x+2) \neq 0$,
 $\frac{3(x+1) - (2x-1)(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{2x+1}{(x+2)(x+1)}, x \neq -2, x \neq -1,$

После преобразований получим:

$$\frac{-2x^2 - 2x + 4}{(x+1)(x+2)} = 0, \frac{-2(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+1)} = 0, \frac{-2(x-1)}{x+1} = 0, x = 1.$$

Проверкой убеждаемся, что найденное число является корнем уравнения.

Ответ: 1.

Пример 2. $x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = 0$.

Решение. Способ 1. Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые

$$x^3 - ax^2 - bx^2 + abx + acx + bcx - abc = 0,$$

$$x^2(x-a) - bx(x-a) - cx(x-a) + bc(x-a),$$

$$(x-a)(x^2 - bx - cx + bc) = 0,$$

$$(x-a)(x-b)(x-c) = 0,$$

$$x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c.$$

Проверкой убеждаемся, что найденные числа являются корнями уравнения.

Ответ: a, b, c.

Способ 2. Корни уравнения можно было легко найти, пользуясь теоремой Виета

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p,$$

для кубического уравнения: если $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, то $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = q$, В

$$x_1x_2x_3 = -r.$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = a + b + c,$$

нашем случае $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = ab + bc + ac,$

$$x_1x_2x_3 = abc,$$

$$x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c.$$

Пример 3. $x^3 - 8 + x - 2 = 0$,

Пример 4. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^4 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^4 = 82.$

Решение. Сделаем подстановку $x = t - \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{2} = t - \frac{1}{2}$. Тогда получаем:

$$\left(t - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^4 = 82,$$

$$(t+1)^4 + (t-1)^4 = 82,$$

$$t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 + t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 = 82,$$

$$t^4 + 6t^2 - 40 = 0.$$

Решая биквадратное уравнение получим корни $t_1 = -2, t_2 = 2$. Следовательно,

$$x_1 = -2 - \frac{1}{2} = -2\frac{1}{2}, x_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

Проверкой убеждаемся, что найденные числа являются корнями уравнения.

Ответ: $-2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$.

Пример 5. $\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$. Подстановка $\frac{x^2 + x - 5}{x} = t$.

Пример 6. $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$. Подстановка $x^2 + 2x = t$.

Пример 7. $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$.

Решение. Симметрическое уравнение. Разделим обе части уравнения на $x^2 \neq 0$,

получим $2x^2 + 3x - 16 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$, т. е. $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0$. Обозначим

$x + \frac{1}{x} = t$, тогда

$x^2 + 2x\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = t^2, x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Получаем

$2(t^2 - 2) + 3t - 16 = 0; 2t^2 + 3t - 20 = 0; t_1 = -4, t_2 = \frac{5}{2}$. Следовательно, имеем

$x + \frac{1}{x} = -4$ и $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$,

$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$. $x_3 = 2, x_4 = \frac{1}{2}$.

Ответ: $-2 \pm \sqrt{3}$, 2 и $\frac{1}{2}$.

Пример 8. $(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7) = 1680$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(x-4)(x-7) \cdot (x-5)(x-6) = 1680$, т. е.

$$(x^2 - 11x + 28)(x^2 - 11x + 30) = 1680.$$

Обозначим $x^2 - 11x + 28 = t$, тогда $t(t+2) = 1680, t^2 + 2t - 1680 = 0, t_1 = -42, t_2 = 40$. Поэтому

$$x^2 - 11x + 28 = -42 \quad \text{и} \quad x^2 - 11x + 28 = 40,$$

$$x^2 - 11x + 70 = 0, \quad x^2 - 11x - 12 = 0,$$

$$D < 0. \quad x_1 = 12, x_2 = -1.$$

Ответ: 12 и -1 .

Пример 9. $4x^4 + 8x^3 + x^2 - 3x - 1 = 0$.

Решение. Здесь $a_n = 4, a_0 = -1$. Поэтому рациональные корни уравнения следует искать среди чисел $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$, (делители 4 есть $\pm 1, \pm 2, \pm 4$, делители -1 есть ± 1).

Если $x = \pm 1$, то $4 + 8 + 1 - 3 - 1 \neq 0$; если $x = -\frac{1}{2}$, то $\frac{4}{16} - \frac{8}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 1 = 0$, т. е. $x = -\frac{1}{2}$

корень уравнения. Делим $4x^4 + 8x^3 + x^2 - 3x - 1$ на $x + \frac{1}{2}$. -

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 + 8x^3 + x^2 - 3x - 1 & x + 1/2 \\ \hline 4x^4 + 2x^3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6x^3 + x^2 \\
 - \underline{6x^3 + 3x^2} \\
 -2x^2 - 3x \\
 - \underline{-2x^2 - x} \\
 -2x - 1 \\
 - \underline{-2x - 1} \\
 0
 \end{array}$$

данное уравнение можно представить в виде $(x+1/2)(4x^3+6x^2-2x-2)=0$. Отсюда $x_1 = -\frac{1}{2}$ (решение, найденное подбором) и $4x^3+6x^2-2x-2=0$, т. е. $2x^3+3x^2-x-1=0$.

Аналогично находим корень этого уравнения: $x_1 = -\frac{1}{2}$, выполнив деление многочлена $2x^3+3x^2-x-1$ на двучлен $x+1/2$. В результате деления получим $(x+1/2)(2x^2+2x-2)=0$. Отсюда $x_1 = -\frac{1}{2} = x_2, x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $-\frac{1}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Пример 10. $2x^3 + x^2 - 9 = 0$.

Пример 11. $4x^3 - 11x + 3 = 0$,

Задания для самостоятельного решения. №5, 6, 7 стр. 97, №2, 4, 5 стр. 98, №1 – 7 (выборочно) стр. 100, №1, 2, 4, 5 стр. 102 – 103 [7].

Замечание: учащиеся выполняют задания под руководством учителя. Для выполнения заданий учащиеся разбиваются на группы. Оставшиеся задания они могут сделать дома. Каждый ученик сам определяет себе количество заданий для самостоятельного решения.

Предполагается, что учащиеся уже умеют выполнять деление многочлена на многочлен и находить целые корни многочлена.

(Урок 3-4)

Цель: сформировать навык нестандартного подхода к решению рациональных уравнений.

Теоретическая часть. При решении уравнений не всегда можно применить стандартный подход, поэтому надо придумать «свой метод», догадаться что-то

прибавить и отнять, выделить полный квадрат, на что-то разделить или умножить, использовать свойства функции и т. д

1. *Выделение полного квадрата:* при решении используются формулы сокращенного умножения – квадрат суммы или квадрат разности $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
2. *Однородные уравнения, т. е.* уравнения вида $ay^{2n} + by^nz^n + cz^{2n} = 0$, где a, b, c, n – заданные числа отличные от нуля; $y=y(x), z=z(x)$ – некоторые функции от x . Делим обе части уравнения на $z^{2n} \neq 0$. Получаем $a\left(\frac{y}{z}\right)^{2n} + b\left(\frac{y}{z}\right)^n + c = 0$. Обозначив $\left(\frac{y}{z}\right)^n = t$, получаем квадратное уравнение относительно t .
3. *Использование монотонности функции. Теорема о корне:* если задано уравнение $f(x)=0$ и $f(x)$ – монотонна (возрастает или убывает на области определения), тогда уравнение имеет не более одного корня. Примерами таких функций являются: $\varphi(x)=x^{2n-1}$ - возрастающая, $\varphi(x)=x^{2n}$ при $x \geq 0$ $\varphi(x)$ - убывает, при $x \leq 0$ $\varphi(x)$ – возрастает, $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ $\varphi(x)$ - убывает, при $k < 0$ $\varphi(x)$ – возрастает.

Свойства монотонности:

- 1). Если функции f и g монотонно возрастают, то $f \pm g$ также монотонно возрастает.
- 2). Если функция f монотонно возрастает, то функция $-f$ монотонно убывает.
- 3). Если функция f монотонно возрастает, то функция $\frac{1}{f}$ монотонно убывает.
4. *Сравнение множеств значений (метод оценки).* Этот метод чаще используется при решении уравнений смешанного типа. Суть его заключается в оценке значений левой и правой части уравнения. Если $f(x)=g(x)$, причем $f(x) \geq A$ и $g(x) \leq A$, то $f(x)=A$ и $g(x)=A$, т. е. решением уравнения являются абсциссы общих точек касания. Если $f(x)=g(x)$, а $f(x) \geq A$ и $g(x) < A$, то уравнение решений не имеет.

Практическая часть. Рассматривается по одному примеру каждого типа, например:

Пример 1. $x^4 - 2x^3 + x - \frac{3}{4} = 0$.

Решение. Выделим полный квадрат, прибавив и вычтя в левой части уравнения

$$\tilde{\sigma}^2 : \underline{\tilde{\sigma}^4 - 2\tilde{\sigma}^3 + \tilde{\sigma}^2} - \tilde{\sigma}^2 + \tilde{\sigma} - \frac{3}{4} = 0, \text{ т.е.}$$

$$(\tilde{\sigma}^2 - \tilde{\sigma})^2 - (\tilde{\sigma}^2 - \tilde{\sigma}) - \frac{3}{4} = 0.$$

Пусть $\tilde{\sigma}^2 - \tilde{\sigma} = t$, тогда $t^2 - t - \frac{3}{4} = 0, t_1 = -\frac{1}{2}, t_2 = \frac{3}{2}$.

Возвращаясь к старой переменной, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^2 - \tilde{\sigma} &= -\frac{1}{2}, & \tilde{\sigma}^2 - \tilde{\sigma} &= \frac{3}{2}, \\ \tilde{\sigma}^2 - \tilde{\sigma} + \frac{1}{2} &= 0, & \tilde{\sigma}^2 - \tilde{\sigma} - \frac{3}{2} &= 0, \\ D &< 0, & \tilde{\sigma}_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$.

Пример 2. $\frac{13x}{2x^2 + x + 3} + \frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} = 6$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дробей на $\tilde{\sigma} \neq 0$:

$$\frac{13}{2\tilde{\sigma} + 1 + \frac{3}{\tilde{\sigma}}} + \frac{2}{2\tilde{\sigma} - 5 + \frac{3}{\tilde{\sigma}}} = 6, \text{ обозначим } 2\tilde{\sigma} + \frac{3}{\tilde{\sigma}} = t.$$

Получаем $\frac{13}{t+1} + \frac{2}{t-5} = 6$, т.е. $13t - 65 + 2t + 2 = 6t^2 - 24t - 30$, т.е.

$$6t^2 - 39t + 33 = 0, \text{ т.е. } 2t^2 - 13t + 11 = 0, t_1 = 1, t_2 = 5\frac{1}{2}. \text{ Следовательно,}$$

$$\begin{aligned} 2\tilde{\sigma} + \frac{3}{\tilde{\sigma}} &= 1, & 2\tilde{\sigma} + \frac{3}{\tilde{\sigma}} &= \frac{11}{2}, \\ 2\tilde{\sigma}^2 - \tilde{\sigma} + 3 &= 0, & 4\tilde{\sigma}^2 - 11\tilde{\sigma} + 6 &= 0, \\ D &< 0, & \tilde{\sigma}_1 = 2, \tilde{\sigma}_2 &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Ответ: $2, \frac{3}{4}$.

Пример 3. $3(x^2 - x + 1)^2 - 5(x + 1)(x^2 - x + 1) - 2(x + 1)^2 = 0$.

Решение. Это так называемое «однородное уравнение», т.е. уравнение вида $\dot{a}y^{2\alpha} + by^\alpha z^\alpha + cz^{2\alpha} = 0$, где a, b, c, α – заданные числа отличные от нуля; $y=y(x)$, $z=z(x)$ – некоторые функции от x . Делим обе части уравнения на $z^{2\alpha} \neq 0$. Получаем

$a\left(\frac{y}{z}\right)^{2\alpha} + b\left(\frac{y}{z}\right)^\alpha + c = 0$. Обозначим $\left(\frac{y}{z}\right)^\alpha = t$, получаем квадратное уравнение относительно t .

Разделим обе части данного уравнения на $(\tilde{\delta}^2 - \tilde{\delta} + 1)^2 \neq 0$:

$$3 - 5\frac{\tilde{\delta} + 1}{\tilde{\delta}^2 - \tilde{\delta} + 1} - 2\left(\frac{\tilde{\delta} + 1}{\tilde{\delta}^2 - \tilde{\delta} + 1}\right)^2 = 0.$$

Пусть $\frac{\tilde{\delta} + 1}{\tilde{\delta}^2 - \tilde{\delta} + 1} = t$, тогда $3 - 5t - 2t^2 = 0$, т.е. $t_1 = -3, t_2 = \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\delta} + 1}{\tilde{\delta}^2 - \tilde{\delta} + 1} &= \frac{1}{2}, & \frac{\tilde{\delta} + 1}{\tilde{\delta}^2 - \tilde{\delta} + 1} &= -3, \\ 2\tilde{\delta} + 2 &= \tilde{\delta}^2 - \tilde{\delta} + 1, & \tilde{\delta} + 1 &= -3\tilde{\delta}^2 + 3\tilde{\delta} - 3, \\ \tilde{\delta}^2 - 3\tilde{\delta} - 1 &= 0, & 3\tilde{\delta}^2 - 2\tilde{\delta} + 4 &= 0, \\ \tilde{\delta}_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}. & D &< 0. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Пример 4. $x^5 + 3x^3 + 5x = 15\sqrt{2}$.

Решение. Левая часть уравнения представляет собой сумму монотонно возрастающих элементарных функций, поэтому по свойству монотонности $f(x) = x^5 + 3x^3 + 5x$ монотонно возрастает на всей области определения. По теореме о корне уравнение имеет не более одного корня. Этот корень легко найти $x = \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Пример 5. $x^2 - \frac{12}{x} + \sqrt{x} = 15$.

Пример 6. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 1 - x + 2x^3$.

Решение. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 1 - \underline{x + 2x^3 - 1} + 1$,

$$x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = -(x - 2x^3 + 1),$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = -(x^3 - 1)^2, \text{ мы видим, что левая часть уравнения принимает}$$

неотрицательные значения, а правая – неположительные, поэтому достаточно решить уравнение $x - \frac{1}{x} = 0$, $x = 1$ и проверить равенство $x^3 - 1 = 0$. При $x = 1$, $1^3 - 1 = 0$, $0 = 0$ – верно, значит 1 – корень уравнения.

Пример 7. $x^4 - 8x + 63 = 0$.

Задания для самостоятельного решения.

№1-5 стр. 105 [7], №6.001- 6. 030 [8], задания В4 централизованного тестирования математика-1 2003 года [12].

Можно предложить учащимся подготовить реферат о других способах решения рациональных уравнений, так как при решении уравнения $x^4 - 8x + 63 = 0$ (уже изученными способами) у учащихся могут возникнуть трудности.

(Урок 5-6).

Цель: обобщить и систематизировать знания учащихся о модуле, продолжить формирование навыка решения уравнений, содержащих переменную под знаком модуля.

Теоретическая часть. При решении уравнений с модулем используется определение модуля и метод интервалов.

Определение: модулем числа a называется расстояние от точки 0 числовой прямой до точки, изображающей число a . Модуль неотрицательного числа равен самому числу, а модуль отрицательного числа равен противоположному ему числу

$$|a| = a, \text{ если } a \geq 0 \text{ и } |a| = -a, \text{ если } a < 0.$$

1. Доказать, что если $|x - a| = |x - b|$, где $a < b$, то x – середина отрезка $[a ; b]$, т.е.

$$x = \frac{1}{2}(a + b).$$

2. Рассматриваются простейшие уравнения:

1. $|3x + 2| = 1$. Решение. 1) Пусть $3x + 2 \geq 0$. Тогда $3x + 2 = 1$, $3x = -1$, $x = -\frac{1}{3}$. 2) Пусть $3x + 2 < 0$. Тогда $3x + 2 = -1$, $3x = -3$, $x = -1$.

Ответ. $-\frac{1}{3}$, -1 .

2. $|x + 3| = x + 3$,
3. $|x - 2| = 2 - x$,
4. $|x - 1| = |x - 2|$,
5. $|x + 3| = |x + 5|$,
6. $|x + 6| = |x + 10|$.

Рассматриваются свойства модуля: 1) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ при любых a и b ;

2) $|a^n| = |a|^n$ при любом a и любом натуральном n ;

3) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ при любом a и любом $b \neq 0$;

4) $|a^n| = a^n$ при любом a , если n – четное натуральное число;

5) $|a^n| = -a^n$, если $a \leq 0$ и n – нечетное натуральное число.

5. *Алгоритм решения уравнений, содержащих переменную под знаком модуля:*

- 1) приравниваем к нулю выражения, стоящие под знаком модуля;
2) отмечаем на числовой оси полученные значения;
3) определяем знак каждого выражения в полученных интервалах и записываем уравнения с учетом этих знаков;
4) решаем каждое уравнение и выбираем ответ с учетом наложенных условий.

6. *Графический способ:*

- 1) преобразуем уравнение так, чтобы левая и правая части содержали по одному выражению с модулем;
2) построим графики левой и правой части;
3) найдем точки пересечения графиков;
4) абсциссы точек пересечения графиков подставим в уравнение, если получим верное равенство, то эти значения переменной являются решением уравнения. Если графики не пересекаются, то уравнение не имеет решений.

Примечание: при решении уравнений с модулем может быть непрерывное множество корней, соответствующее определенному промежутку числовой оси. Стоит отметить, что графический способ во многих случаях является основным методом решения уравнений с модулем. Учащимся необходимо напомнить правило построения графиков с помощью преобразований.

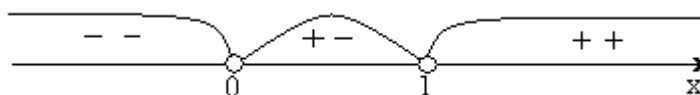
Практическая часть. Приводятся примеры решения уравнений аналитическим и графическим способом.

Пример 1. Решите уравнение $|x| + |x - 1| = 1$.

Решение. 1) $x = 0$, $x - 1 = 0$,

$$x = 1.$$

2)



$$3) x \in (-\infty, 0), -x - (x - 1) = 1,$$

$$x \in [0, 1), x - (x - 1) = 1,$$

$$x \in [1, \infty), x + (x - 1) = 1.$$

$$4) \text{ Решаем первое уравнение } -x - x + 1 = 1,$$

$$-2x + 1 = 1,$$

$$-2x = 0,$$

$$x = 0. \quad 0 \text{ не является корнем}$$

уравнения, так как не принадлежит интервалу $(-\infty; 0)$.

$$\text{Решаем второе уравнение } x - x + 1 = 1,$$

$$0x = 0,$$

x – любое число из интервала $[0; 1)$.

$$\text{Решаем третье уравнение } x + x - 1 = 1,$$

$$2x = 2,$$

$$x = 1.$$

$1 \in [1, \infty)$, поэтому 1 – корень уравнения.

Ответ. $[0, 1]$

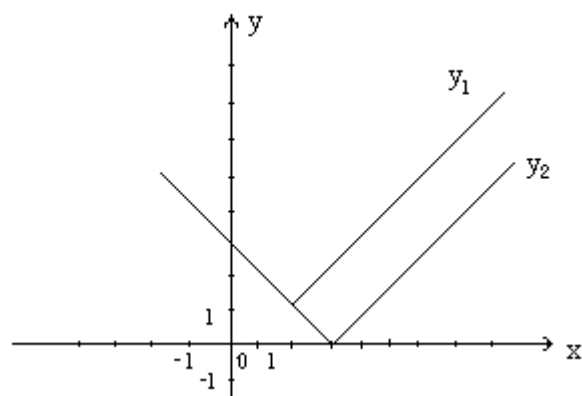
Пример 2. Решите уравнение графическим способом $|2x - 4| - |6 - 2x| + 2 = 0$.

Решение. 1) Запишем данное уравнение в виде $2|x - 2| - 2|3 - x| + 2 = 0$,

Разделим обе части уравнения на 2 и запишем в виде $|x - 2| + 1 = |x - 3|$,

2) Построим графики левой и правой части: $y_1 = |x - 2| + 1$ и $y_2 = |x - 3|$,

вершина графика y_1 в точке (2;1), а графика y_2 в точке (3;0)



3) Из рисунка видно, что $y_1 = y_2$ при $x \leq 2$ (графики сливаются).

4) Проверка: пусть $x = 2$, тогда $|4 - 4| - |6 - 4| + 2 = 0$, $0 = 0$ – верно,

пусть $x = 0$, тогда $|4 - 0| - |6 - 0| + 2 = 0$, $0 = 0$ – верно.

(достаточно проверить несколько значений).

Ответ: $(-\infty; 2)$.

Можно предложить учащимся решить это уравнение аналитически.

Также следует отметить, что для №6.145 – 6.151 из сборника [4] характерно также непрерывное множество корней.

Пример 3. $|7x - 12| - |7x - 1| = 1$,

Пример 4. №6.153, 6.155 [4],

Пример 5. $|x^2 - 14| = |x^2 - 4|$.

Задания для самостоятельного решения:

№6.145-6.151, №6.154, №6.156 [4], №1-9 стр. 107 [7]

(Урок 8-9).

Цель: обобщить и систематизировать знания, умения и навыки решения неравенств;

сформировать навык решения рациональных неравенств высших степеней, дробно-рациональных неравенств и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля;

Теоретическая часть. Определение: выражения вида $f(x) > g(x)$; $f(x) < g(x)$;

$f(x) \geq g(x)$; $f(x) \leq g(x)$ называются неравенствами с одной переменной.

Два неравенства называются *равносильными*, если множества их решений совпадают.

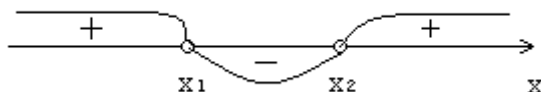
Повторяются правила преобразования неравенств в равносильные. Основная идея решения неравенства заключается в замене неравенства более простым, но равносильным заданному неравенству.

1. *Квадратные неравенства*, т. е. неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$ (< 0), $a \neq 0$.

Будем считать, что $a > 0$. Если это не так, то умножив обе части неравенства на -1 и изменив знак неравенства на противоположный, получим желаемое.

Чтобы решить неравенство можно:

- 1) квадратный трехчлен разложить на множители, т. е. неравенство записать в виде $a(x - x_1)(x - x_2) > 0$ (< 0);
- 2) корни многочлена нанести на числовую ось;
- 3) построить «змейку», проходящую через корни, крайний правый промежуток положителен.



Если квадратный трехчлен не имеет корней, то при $a > 0$ и $D < 0$ квадратный трехчлен при любом x *положителен*.

2. *Рациональные неравенства высших степеней* (> 2), т.е. неравенства вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 > 0 \text{ } (< 0), \quad n > 2.$$

Чтобы решить неравенство можно:

1) с помощью методов решения рациональных уравнений разложить многочлен на множители, т. е. неравенство записать в виде

$$a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) > 0 (< 0).$$

2) сократим на заведомо положительные выражения или отрицательные (в последнем случае знак неравенства менять на противоположный).

3) по правилу «змейки» найдем решение (крайний правый промежуток положителен, а затем знаки чередуются).

3. *Дробно-рациональные неравенства.* Для решения неравенства применяется метод интервалов (метод промежутков), который состоит в следующем:

а) на числовую ось наносят точки $x_1, x_2, \dots, x_n$, разбивающие ее на промежутки, в которых выражение $\frac{f(x)}{g(x)}$ определено и сохраняет знак (плюс или минус). Такими точками могут быть корни уравнений $f(x)=0$ и $g(x)=0$. Соответствующие этим корням точки отмечают на числовой оси: закрашенными кружками – точки, удовлетворяющие заданному неравенству, а светлыми кружками – не удовлетворяющие ему;

б) определяют и отмечают на числовой оси знак выражения $\frac{f(x)}{g(x)}$ для значений x , принадлежащих каждому из полученных промежутков. Если функции $f(x)$ или $g(x)$ являются многочленами и не содержат множителей вида $(x - a)^{2n}$, где $n \in \mathbb{N}$, то достаточно определить знак функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ в любом таком промежутке, а в остальных промежутках знаки плюс и минус будут чередоваться.

Если же в числителе и знаменателе дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеется множитель вида

$(x-a)^{2n}$, где $n \in \mathbb{N}$, то, полагая $x \neq a$, делят обе части заданного неравенства на множитель $(x-a)^{2n}$, положительный при всех значениях $x \neq a$, и непосредственной проверкой выясняют, удовлетворяет ли значение $x = a$ заданному неравенству.

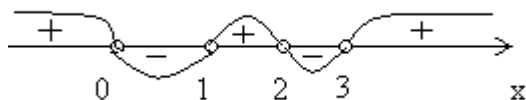
4. *Неравенства с модулем.* При решении неравенств с неизвестным под знаком модуля пользуемся определением модуля, а также необходимо помнить, что решением неравенства $|x| < a$, $a > 0$ является множество $(-a; a)$, а при решении неравенства $|x| > a$, $a > 0$ является объединение множеств $(-\infty; -a) \cup (a; \infty)$.

Практическая часть.

Пример 1. $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x < 0$.

Решение. Разложим на множители многочлен $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$, используя способ подбора (деления многочлена на многочлен), получим:

$$x(x-1)(x-2)(x-3) < 0.$$



Ответ: $(0;1) \cup (2;3)$.

Пример 2. $(x - 1)^5(x + 2)(2x - 10 - x^2) < 0$.

Решение. Перепишем неравенство следующим образом:

$$(x - 1)(x - 1)^4(x + 2)(-x^2 + 2x - 10) < 0.$$

Разделим почленно на $(x - 1)^4 > 0$ при $x \neq 1$; обе части неравенства умножим на -1.

Получим $(x - 1)(x + 2)(x^2 - 2x + 10) > 0$. Сокращаем на $x^2 - 2x + 10 > 0$ (так как $a = 1$, $a > 0$, $D < 0$). Получаем $(x - 1)(x + 2) > 0$.

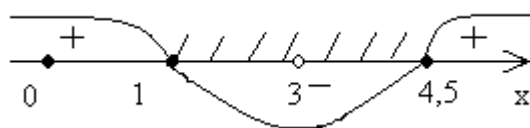
Ответ: $(-\infty; -2) \cup (1; \infty)$.

Замечание: Предложенный метод более понятен учащимся, его удобно использовать для отработки и закрепления навыков решения неравенств, однако для оформления письменных работ используется метод интервалов.

Пример 3. $x^2(2x - 9)(x - 1)^3 / (2x - 6)^4 \leq 0$.

Решение. Полагая $x \neq 0$ и $x \neq 3$, разделим обе части неравенства на положительную дробь $\frac{x^2}{(2x - 6)^4}$ и сразу заметим, что $x=0$ удовлетворяет заданному неравенству, а $x=3$ не удовлетворяет. Кроме того, множители с нечетными показателями степени заменим соответствующими множителями первой степени (ясно, что при этом знак выражения в левой части неравенства не изменится). В результате получим более простое неравенство, равносильное заданному для всех $x \neq 0$ и $x \neq 3$:

$$(2x - 9)(x - 1) \leq 0, \text{ решением которого является отрезок } [1; 4,5].$$



Учитывая, что значение $x=0$ является решением заданного неравенства, но не принадлежит промежутку $[1; 4,5]$, а $x=3$ не является решением заданного

неравенства, но принадлежит этому промежутку, запишем ответ: $[1;3) \cup (3;4,5]$, 0. Ответ: $[1;3) \cup (3;4,5]$, 0.

Пример 4. $|x - 3| + |x + 2| - x > 5$.

Решение. На числовой оси отметим значения, при которых

$$x - 3 = 0 \quad \text{и} \quad x + 2 = 0,$$

$$x = 3 \quad \quad \quad x = -2.$$

Рассмотрим неравенство на каждом из полученных промежутков.

а) Если $x < -2$, то неравенство принимает вид $-x + 3 - x - 2 - x > 5$, т. е.

$$-3x > 4, \quad x < -\frac{4}{3}.$$

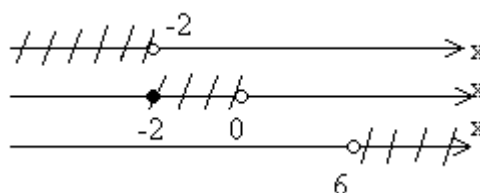
Из соотношений $x < -2$ и $x < -\frac{4}{3}$ следует, что $x < -2$ является решением неравенства.

б) Если $-2 \leq x < 3$, то неравенство принимает вид $-x + 3 + x + 2 - x > 5$, т. е. $-x > 0$, $x < 0$.

Из соотношений $-2 \leq x < 3$ и $x < 0$ следует, что $-2 \leq x < 0$ является решением данного неравенства.

в) Если $x \geq 3$, то $x - 3 + x + 2 - x > 5$, т. е. $x > 6$ – решение неравенства.

Найденные решения данного неравенства на различных промежутках удобно



изобразить на числовых осях.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (6; \infty)$.

Задания для самостоятельного решения. №1-№5 стр. 155-156, №1-№5 стр. 157-158, №1-№1-№5 стр.159, №1-№5 стр.161 [7]. Задания В7 тестирования математика 1, А10 математика 2[12].

(Урок 9-10).

Цель: закрепление и совершенствование навыков решения рациональных уравнений и неравенств; развитие умения анализировать, обобщать, классифицировать.

Теоретическая часть: Учащимся предлагается сформулировать интересующие их вопросы, затем ученики по цепочке отвечают на них (используя конспект). Те вопросы, на которые ученики затрудняются ответить, рассматриваются еще раз и закрепляются практическими заданиями. Затем учащимся предлагается обменяться своими решениями и оказать помощь тем, кто данные задачи не смог выполнить, объясняя каждый этап решения.

Практическая часть: Рассматриваются те задания, которые никто не решил, а также № 1-11, №14-18 стр.108-109, №1-4 стр. 155-156, №1-4 стр. 157, №1-5 стр. 159, №1-4 стр.161 [7] - выборочно, задания В7 и А10 тестирования [11] **Задания для самостоятельного решения:**

Учитель сообщает, что на следующем занятии пройдет соревнование в форме математического боя. Для этого учащиеся делятся на две группы (желательно под руководством учителя, чтобы команды были равны по силам). Задача каждой команды - придумать как можно больше способов решения.

1. Решите уравнения:

$$1. \frac{\tilde{o}^2 + 1}{\tilde{o}} + \frac{\tilde{o}}{\tilde{o}^2 + 1} = 2,9,$$

$$2. 8x^4 + x^3 + 64x + 8 = 0,$$

$$3. \left(\frac{\tilde{o}^2 + 6}{\tilde{o}^2 - 4} \right)^2 = \left(\frac{5\tilde{o}}{4 - \tilde{o}^2} \right)^2,$$

$$4. \frac{\tilde{o}^2}{3} + \frac{48}{\tilde{o}^2} = 10 \left(\frac{\tilde{o}}{3} - \frac{4}{\tilde{o}} \right),$$

$$5. x^2 + |x-3| + |x-1| = 1.$$

2. Решите неравенства:

$$1. \frac{1}{\tilde{o}^2 - 5\tilde{o} + 6} \leq \frac{1}{2},$$

$$2. |2x^2 - 9x + 15| \geq 20,$$

$$3. (x-3)(x-1)^2(3x-6-x^2) < 0,$$

$$4. |x+1| + |x-1| < 0,$$

$$5. \left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| - 1 \leq 0.$$

Замечание: количество заданий можно уменьшить или дать проще, в зависимости от уровня подготовки и количества учащихся

(Урок 11-12).

Цель: контроль степени усвоения знаний, умений и навыков решения рациональных уравнений и неравенств; формирование навыков самоконтроля

и контроля; развитие познавательной активности и культуры речи, умения доказывать свою точку зрения.

Ход занятия.

Учитель сообщает условия игры. Выбираются капитаны. Каждая команда должна решить, кто из игроков какое задание будет защищать во время игры. Капитаны во время игры заполняют лист учета баллов каждого игрока и команды.

Правила игры: Вступительное слово ведущего: Здравствуйте! Мы рады приветствовать всех зрителей, участников команд и наисправедливейшее жюри!

Математический бой чем-то напоминает турнир рыцарей, в котором игра идет по честным правилам, а такие качества как честность и благородство присуще сильной половине человечества. С другой стороны, математический бой – это игра, где нужны интуиция и верная тактика, а в этом, как известно, сильна прекрасная половина человечества. В нашей игре не должно быть обид и разочарований. Итак, в нашей сегодняшней игре принимают участие две команды – (название).

Правила оценивания выступлений команд: докладчик (Д) и оппонент (О)

1. -Если Д решает задачу верно и О соглашается, то команда Д получает 10 б., а команда О получает 0 б.
 - Если Д решает задачу верно, а О предложил свой верный способ решения, то и команда Д, и команда О получают по 10 б.
 - Если Д решает задачу верно, а О не соглашается и предлагает свой неверный способ, то команда Д получает 10 б., а команда О получает -10 б.
2. – Если Д решает задачу неверно, и О соглашается, что решение неверно, но не предлагает своего решения, то Д получает -10 б., а О получает 0 б.
 - Если Д решает задачу неверно, а О предлагает свой верный способ, то Д получает

-10 б., а О получает 10 б.

- Если Д решает задачу неверно, а О предлагает свой тоже неверный способ, то Д

получает -10 б. и О тоже -10 б.

3. – Если Д признает, что не решил задачу, а О предлагает верное решение, то Д получает 0 б., а О получает 10 б.

- Если Д признает, что не решил задачу, а О предлагает неверное решение, то Д

получает 0 б. и О получает -10 б.

- Если Д признает, что не решил задачу, О тоже сообщает об этом, то обе

команды получают по 0 б.

Чтобы определить право первого «вызова», капитанам предлагают решить простейшую задачу на сообразительность, кто первый решит, тот и получает право первого «вызова».

Задача. Три разных натуральных числа сначала сложили, а затем их же перемножили. Сумма и произведение оказались равными. Какие это числа?

Ответ: 1, 2, 3.

Капитан, получивший право первого «вызова» советуется с командой и они называют номер задачи, решение которой желали бы услышать. Команда соперников сообщает принят ли вызов. Команды вызывают друг друга по очереди. Если вызванная команда хочет ответить, то она выставляет докладчика, а другая команда выставляет оппонента для проверки решения. Если вызванная команда отказалась отвечать, то вызвавшая команда должна сама рассказать решение задачи. При этом если у оппонента нет решения, то вызов считается некорректным. После каждого выступления жюри оценивает выступления докладчика и оппонента, а капитаны ставят баллы в индивидуальный лист учащегося (см. приложение 2).

Замечание: к доске можно выходить с готовым решением, каждый докладчик может выступать один раз.

По окончании игры подводится итог и определяется рейтинг каждого ученика по тому участию, которое он принял во время игры и подготовке к ней. Учитель в свою очередь отмечает интересные подходы к решению задач и также может добавить лишний балл ученику за интересные находки.

(Урок 13-14).

Цель: сформировать навык решения иррациональных уравнений методом замены переменной. Познакомить учащихся с методом решения иррациональных уравнений, содержащих кубические радикалы.

Теоретическая часть. 1. Определение: уравнения, содержащие переменную под знаком корня, называются *иррациональными*.

2. Уравнения, имеющие одно и то же множество корней, называются *равносильными*.

В процессе решения заданное уравнение заменяют более простым равносильным ему уравнением с помощью преобразований, известных нам из курса 7 класса.

3. Если каждый корень данного уравнения является корнем другого уравнения, то второе уравнение является *следствием* первого.

Корни второго уравнения, не удовлетворяющие первому уравнению, называются *посторонними корнями* первого уравнения и не считаются решением этого уравнения.

К появлению посторонних корней могут, например, привести (но не обязательно приводят) такие преобразования: возведение в квадрат (или другую четную степень) обеих частей уравнения, умножение обеих частей уравнения на алгебраическое выражение, содержащее переменную, и т. п.

4. Чтобы выяснить, имеются ли среди корней уравнения-следствия посторонние корни исходного уравнения, необходимо проверить каждый из найденных корней подстановкой его в исходное уравнение.

Можно поступить иначе: на каждом этапе решения уравнения определять промежутки, в которых могут находиться корни уравнения. Все корни, не принадлежащие этим промежуткам, являются посторонними и должны быть

отброшены. Однако остальные корни все равно необходимо проверить подстановкой в исходное уравнение.

5. Если уравнение имеет вид $f(x)h(x) = g(x)h(x)$, то деление обеих его частей на $h(x)$, как правило, не допустимо, поскольку может привести к потере корней; в этом случае могут быть потеряны корни уравнения $h(x) = 0$, если они существуют.

Уравнение не считается решенным как в случае, когда ответ содержит посторонние корни, так и в случае, когда в процессе решения был потерян хотя бы один корень.

6. Решение иррационального уравнения следует искать в ОДЗ неизвестного. Для этого следует напомнить, что корень четной степени из числа в той же степени равен модулю этого числа. Корень четной степени определен только для неотрицательных чисел, причем этот корень равен неотрицательному числу, а из равенства $\sqrt[n]{a} = a$ следует $x = a^{2n}$.

7. Основные методы решения иррациональных уравнений:

1). *Уединение радикала и возведение в степень.* Смысл таких преобразований в сведении данного иррационального уравнения к равносильному ему рациональному уравнению («рационализация уравнений»). Этому методу много внимания уделяется в любом школьном курсе, поэтому останавливаться на нем не следует.

2). *Введение новой переменной (подстановка).* Сущность метода описана ранее. Подробнее поясним на примерах.

3). *Уравнения, содержащие кубические радикалы.* Основным методом решения таких уравнений является последовательное возведение в куб обеих частей уравнения, используя формулы $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b).$$

Практическая часть. Пример 1. $x^2 + 3x - 18 + 4\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 0$.

Решение. Обозначим $x^2 + 3x - 6 = t$ (можно $x^2 + 3x = t$ или $\sqrt{t^2 + 3t - 6} = t$, $t \geq 0$).

Тогда получаем $t - 12 + 4\sqrt{t} = 0$, т. е. $4\sqrt{t} = 12 - t$, учитывая, что $t \geq 0$ и $12 - t \geq 0$ возведем обе части уравнения в квадрат: $16t = 144 - 24t + t^2$, т. е.

$$t^2 - 40t + 144 = 0, t^2 = 36, t = 4.$$

Значение $t = 36$ не удовлетворяет условию $12 - t \geq 0$. Итак, $x^2 + 3x - 6 = 4$,

$$x^2 + 3x - 10 = 0,$$

откуда находим корни -5 и 2. Проверкой убеждаемся, что найденные числа удовлетворяют данному уравнению. Ответ: -5 и 2.

Пример 2. $\sqrt{\tilde{o} + 8 + 2\sqrt{\tilde{o} + 7}} + \sqrt{\tilde{o} + 1 - \sqrt{\tilde{o} + 7}} = 4$.

Решение. Обозначим $\sqrt{\tilde{o} + 7} = t \geq 0$, отсюда $\tilde{o} + 7 \geq 0$, $\tilde{o} = t^2 - 7$ и получаем

$$\sqrt{t^2 - 7 + 8 + 2t} + \sqrt{t^2 - 7 + 1 - t} = 4, \text{ т.е.}$$

$$\sqrt{t^2 + 2t + 1} + \sqrt{t^2 - t - 6} = 4,$$

$$|t + 1| + \sqrt{t^2 - t - 6} = 4;$$

но $t + 1 > 0$ (так как $t \geq 0$), поэтому $\sqrt{t^2 - t - 6} = 4 - t - 1$ или $\sqrt{t^2 - t - 6} = 3 - t \Rightarrow$

$$t^2 - t - 6 \geq 0, 3 - t \geq 0. (4)$$

Возводим в квадрат: $t^2 - t - 6 = 9 - 6t + t^2$, т.е. $5t = 15$ или $t = 3$, найденное значение удовлетворяет неравенствам (4). Стало быть,

$$\sqrt{\tilde{o} + 7} = 3 \Rightarrow \tilde{o} + 7 = 9, \tilde{o} = 2. \text{ Проверкой убеждаемся, что это корень уравнения.}$$

Ответ: 2.

Пример 3. $\frac{4}{\sqrt[3]{\tilde{o} + 2}} + \frac{\sqrt[3]{\tilde{o} + 3}}{5} = 2$, подстановка $\sqrt[3]{\tilde{o} + 2} = t$ (или $\sqrt[3]{\tilde{o}} = t$).

Пример 4. $\frac{\sqrt{\tilde{o}} + \sqrt[3]{\tilde{o}}}{\sqrt{\tilde{o}} - \sqrt[3]{\tilde{o}}} = 3$, подстановка $\tilde{o} = t^6$.

Пример 5. $\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + 2x + 9}$, подстановка $x^2 + x = t$.

Пример 6. $\sqrt{\frac{18 - 7x - x^2}{8 - 6x + x^2}} + \sqrt{\frac{8 - 6x + x^2}{18 - 7x - x^2}} = \frac{13}{6}$, подстановка $\sqrt{\frac{18 - 7\tilde{o} - \tilde{o}^2}{8 - 6\tilde{o} + \tilde{o}^2}} = t > 0$.

Пример 7. $\sqrt[3]{\tilde{o} + 45} - \sqrt[3]{\tilde{o} - 16} = 1$.

Решение. Возведем в куб обе части уравнения

$$(\sqrt[3]{\tilde{o} + 45} - \sqrt[3]{\tilde{o} - 16})^3 = (1)^3, \text{ т.е.}$$

$(\tilde{o}+45)+(\tilde{o}-16)-3\cdot\sqrt[3]{\tilde{o}+45}\cdot\sqrt[3]{\tilde{o}-16}\cdot(\sqrt[3]{\tilde{o}+45}-\sqrt[3]{\tilde{o}-16})=1$, учитывая, что выражение в скобках равно 1 (см. условие), получаем

$$3\cdot\sqrt[3]{(\tilde{o}+45)(\tilde{o}-16)}=60, \text{ т.е.}$$

$$\sqrt[3]{(\tilde{o}+45)(\tilde{o}-16)}=20. \text{ Возводим в куб:}$$

$$(x+45)(x-16)=8000, \text{ т.е.}$$

$$\tilde{o}^2 + 29\tilde{o} - 8720 = 0, \quad \tilde{o}_1 = 80, \quad \tilde{o}_2 = -109.$$

Проверкой убеждаемся, что это корни уравнения.

Ответ: 80 и -109.

Пример 8. $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}.$

Решение. Приведем его без дополнительных объяснений.

$$(x+5)+(x+6)+3\cdot\sqrt[3]{x+5}\cdot\sqrt[3]{x+6}\cdot(\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6})=2x+11, \text{ т.е.}$$

$$2x+11+3\cdot\sqrt[3]{x+5}\cdot\sqrt[3]{x+6}\cdot\sqrt[3]{2x+11}=2x+11, \text{ т.е.}$$

$$3\cdot\sqrt[3]{x+5}\cdot\sqrt[3]{x+6}\cdot\sqrt[3]{2x+11}=0,$$

$$\sqrt[3]{x+5}=0, \quad \sqrt[3]{x+6}=0, \quad \sqrt[3]{2x+11}=0,$$

$$x_1 = -5; \quad x_2 = -6; \quad x_3 = -\frac{11}{2}.$$

Проверкой убеждаемся, что это корни уравнения. Ответ: -5, -6, $-\frac{11}{2}$.

Пример 9. $\sqrt[3]{3\tilde{o}+5} - \sqrt[3]{2\tilde{o}+6} = \sqrt[3]{\tilde{o}}.$

Решение. После возведения в куб обеих частей уравнения, получим

$$\tilde{o}+18-3\cdot\sqrt[3]{3\tilde{o}+24}\cdot\sqrt[3]{2\tilde{o}+6}\cdot(\sqrt[3]{3\tilde{o}+24}-\sqrt[3]{2\tilde{o}+6})=\tilde{o},$$

или, учитывая исходное уравнение,

$$\sqrt[3]{\tilde{o}(3\tilde{o}+24)(2\tilde{o}+6)}=6.$$

Возводя в куб, получаем

$$x(x+8)(x+3)=36, \text{ т.е.}$$

$$x^3+11x^2+24x-36=0,$$

$$x^3-x^2+12x^2-12x+36x-36=0,$$

$$x^2(x-1)+12x(x-1)+36(x-1)=0,$$

$$(x-1)(x^2+12x+36)=0.$$

Отсюда находим, что $\tilde{\alpha}_1 = 1, \tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_3 = -6$. Проверкой убеждаемся, что $x = -6$ – посторонний корень.

Ответ: 1.

Пример 10. $\sqrt{\tilde{\alpha}+1} + \sqrt{4\tilde{\alpha}+13} = \sqrt{3\tilde{\alpha}+12}$.

Решение. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$\tilde{\alpha}+1+4\tilde{\alpha}+13+2\sqrt{(\tilde{\alpha}+1)(4\tilde{\alpha}+13)} = 3\tilde{\alpha}+12,$$

$$\sqrt{(\tilde{\alpha}+1)(4\tilde{\alpha}+13)} = -(\tilde{\alpha}+1).$$

Еще одно возведение в квадрат привело бы к уничтожению иррациональности, однако здесь нет необходимости в этом преобразовании. Замечаем, что полученное уравнение-следствие может иметь решение только при условии $x+1 \leq 0$. вместе с тем одним из условий существования решения исходного уравнения является требование $x+1 \geq 0$. оба условия совместны в единственном случае, если $x+1=0$, откуда $x=-1$. Это значение x , как легко проверить, удовлетворяет исходному уравнению. Так как уравнение-следствие других корней не имеет, то других корней не имеет и исходное уравнение. Ответ: -1.

Пример 11. $\sqrt[3]{(5+\tilde{\alpha})^2} + 4\sqrt[3]{(5-\tilde{\alpha})^2} = 5\sqrt[3]{25-\tilde{\alpha}^2}$.

Решение. Так как $x=5$ не является корнем уравнения, то обе части уравнения можно разделить на $\sqrt[3]{(5-\tilde{\alpha})^2}$, причем потери корней не произойдет. Получаем уравнение, равносильное исходному:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{5+\tilde{\alpha}}{5-\tilde{\alpha}}\right)^2} + 4 = 5\sqrt[3]{\frac{5+\tilde{\alpha}}{5-\tilde{\alpha}}}.$$

Полагая $\sqrt[3]{\frac{5+\tilde{\alpha}}{5-\tilde{\alpha}}} = z$, приходим к квадратному уравнению $z^2-5z+4=0$, откуда

$z_1=1, z_2=4$. Для отыскания x имеем два уравнения:

$\sqrt[3]{\frac{5+\tilde{\alpha}}{5-\tilde{\alpha}}} = 1$ и $\sqrt[3]{\frac{5+\tilde{\alpha}}{5-\tilde{\alpha}}} = 4$. Возводя в куб обе части каждого из них, получаем

$\frac{5+\tilde{\alpha}}{5-\tilde{\alpha}} = 1$, откуда $x=0$, и $\frac{5+\tilde{\alpha}}{5-\tilde{\alpha}} = 64$, откуда $\tilde{\alpha} = \frac{63}{13}$. Проверкой убеждаемся, что

это корни. Ответ: 0 и $\frac{63}{13}$.

Пример 12. $2\tilde{\delta}^2 + 6 - 2\sqrt{2\tilde{\delta}^2 - 3\tilde{\delta} + 2} = 3\tilde{\delta} + 3$.

Решение. Запишем уравнение в следующем виде:

$$(2\tilde{\delta}^2 - 3\tilde{\delta} + 2) - 2\sqrt{2\tilde{\delta}^2 - 3\tilde{\delta} + 2} + 1 = 0.$$

Положим $\sqrt{2\tilde{\delta}^2 - 3\tilde{\delta} + 2} = z$; отметим, что $z \geq 0$.

Производя указанную замену, получим уравнение $z^2 - 2z + 1 = 0$, откуда $z = 1$.

Это значение удовлетворяет условию $z \geq 0$ и поэтому уравнение

$$\sqrt{2\tilde{\delta}^2 - 3\tilde{\delta} + 2} = 1 \text{ или } 2\tilde{\delta}^2 - 3\tilde{\delta} + 1 = 0 \text{ равносильно заданному.}$$

Корни $\tilde{\delta}_1 = \frac{1}{2}, \tilde{\delta}_2 = 1$ этого уравнения являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $\frac{1}{2}$ и 1.

Пример 13. $\sqrt{\tilde{\delta} + 3 - 4\sqrt{\tilde{\delta} - 1}} + \sqrt{\tilde{\delta} + 8 - 6\sqrt{\tilde{\delta} - 1}} = 1$.

Решение. Положим $\sqrt{\tilde{\delta} - 1} = z$ и заметим, что $z \geq 0, x \geq 1, x = z^2 + 1$.

$$\text{Тогда } \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} = \sqrt{z^2 - 4z + 4} = |z - 2|; \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = \sqrt{z^2 - 6z + 9} = |z - 3|.$$

Исходное уравнение примет вид $|z - 2| + |z - 3| = 1$. (Учащиеся решают самостоятельно.)

Решая последнее уравнение, имеем: $2 \leq z \leq 3$.

Так как $\sqrt{\tilde{\delta} - 1} = z$, то $2 \leq \sqrt{\tilde{\delta} - 1} \leq 3, 4 \leq \tilde{\delta} - 1 \leq 9, 5 \leq \tilde{\delta} \leq 10$.

Ответ: $[5; 10]$

Примеры для самостоятельного решения: №1-№7 стр. 112, №1-№5 стр. 114 [7], №6.031-№6.066 [8].

(Урок 15-16).

Цель: сформировать навык приведения нестандартных уравнений к виду, способ решения которого уже известен. Выработать умение систематизировать и обобщать известные факты и применять их на практике.

Теоретическая часть. При решении уравнений не всегда виден тот путь, который приведет нас к рациональному способу. Поэтому, прежде всего, необходимо учащимся еще раз напомнить, что:

- при решении уравнений можно обе его части умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля;
- можно увидеть после некоторых преобразований уже «знакомое» уравнение, например, однородное;
- наряду с данным уравнением рассмотреть еще одно;
- заменить данное уравнение более простым, введя не одну, а две переменные;
- выделить полный квадрат и т. п.

Практическая часть. Пример 1. $\frac{\tilde{o}^2}{\sqrt{2\tilde{o}+15}} + \sqrt{2\tilde{o}+15} = 2\tilde{o}.$

Решение. Разделим обе части уравнения на $\tilde{o} \neq 0$:

$$\frac{\tilde{o}}{\sqrt{2\tilde{o}+15}} + \frac{\sqrt{2\tilde{o}+15}}{\tilde{o}} = 2.$$

Пусть $\frac{\tilde{o}}{\sqrt{2\tilde{o}+15}} = t$, тогда

$$t + \frac{1}{t} = 2 \Rightarrow t = 1, \text{ т.е. } \frac{\tilde{o}}{\sqrt{2\tilde{o}+15}} = 1, \text{ т.е. } \sqrt{2\tilde{o}+15} = \tilde{o} \Rightarrow \tilde{o} > 0,$$

$$2\tilde{o}+15 = \tilde{o}^2, \quad \tilde{o}_1 = 5, \quad \tilde{o}_2 = -3.$$

Так как $\tilde{o}_2 < 0$, то $\tilde{o}_2$ не является корнем уравнения.

Ответ: 5.

Пример 2. $\sqrt[4]{\tilde{o}+41} + \sqrt[4]{41-\tilde{o}} = 4.$

Решение. Введем две переменные: $\sqrt[4]{\tilde{o}+41} = u \geq 0, \quad (1)$

$$\sqrt[4]{41-\tilde{o}} = v \geq 0, \quad (2)$$

Тогда $u+v=4$. Последнее уравнение получаем из (1) и (2).

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{o}+41 = u^4, \\ 41-\tilde{o} = v^4 \end{array} \right\} \Rightarrow u^4 + v^4 = 82.$$

$$\text{Итак, имеем } \begin{cases} u+v=4, \\ u^4+v^4=82. \end{cases} \quad (3)$$

Теперь, если первое уравнение системы поставим во второе, получим $(4-u)^4 + v^4 = 82$, или $(u-4)^4 + v^4 = 82$. Это уравнение можно решить, сделав подстановку $v = t + 2$.

Решим систему (3) другим путем, используя формулу $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$.

Из $u^4 + v^4 = 82$ следует $(u^2 + v^2)^2 - 2u^2v^2 = 82$, т.е. $((u+v)^2 - 2uv)^2 - 2u^2v^2 = 82$.

С учетом, что $u + v = 4$, получаем

$$(16 - 2uv)^2 - 2u^2v^2 = 82, \text{ т.е.}$$

$$256 - 64uv + 4u^2v^2 - 2u^2v^2 - 82 = 0, \text{ т.е.}$$

$$2u^2v^2 - 64uv + 174 = 0, \text{ т.е.}$$

$$(uv)^2 - 32(uv) + 87 = 0, \quad uv = 3, \quad uv = 29.$$

Итак, получаем две системы

$\begin{cases} u + v = 4, \\ uv = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} u + v = 4, \\ uv = 29. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} u = 3, \\ v = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} u = 1, \\ v = 3 \end{cases}$ (вторая система не имеет решения).

Возвращаясь к (1) и (2), получаем

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x+41} = 3, \\ \sqrt[4]{41-x} = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sqrt[4]{x+41} = 1, \\ \sqrt[4]{41-x} = 3. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $x_1 = 40$, $x_2 = -40$.

Ответ: 40, -40.

Пример 3. $6 \cdot \sqrt[3]{\tilde{o}-3} + \sqrt[3]{\tilde{o}-2} = 5 \cdot \sqrt[6]{(\tilde{o}-2)(\tilde{o}-3)}$.

Решение. Отметим сразу, что $(x-2)(x-3) \geq 0$. (4)

Считая, что $x \geq 3$, перепишем уравнение в другом виде:

$$6 \cdot \sqrt[6]{(\tilde{o}-3)^2} + \sqrt[6]{(\tilde{o}-2)^2} = 5 \cdot \sqrt[6]{(\tilde{o}-2)(\tilde{o}-3)};$$

это однородное уравнение. Разделим обе части уравнения на $\sqrt[6]{(\tilde{o}-3)^2} \neq 0$.

Получаем

$$6 + \sqrt[6]{\left(\frac{\tilde{o}-2}{\tilde{o}-3}\right)^2} = 5 \cdot \sqrt[6]{\frac{\tilde{o}-2}{\tilde{o}-3}}. \text{ Пусть } \sqrt[6]{\frac{\tilde{o}-2}{\tilde{o}-3}} = t > 0, \text{ тогда}$$

$$6 + t^2 = 5t, \text{ т.е. } 6 + t^2 - 5t = 0, \text{ или } t_1 = 2, \quad t_2 = 3. \text{ Значит,}$$

$$\sqrt[6]{\frac{\tilde{\delta}-2}{\tilde{\delta}-3}} = 2, \text{ и } \sqrt[6]{\frac{\tilde{\delta}-2}{\tilde{\delta}-3}} = 3, \text{ следовательно,}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\delta}-2}{\tilde{\delta}-3} &= 64 & \frac{\tilde{\delta}-2}{\tilde{\delta}-3} &= 729, \\ \tilde{\delta}-2 &= 64\tilde{\delta}-192, & \text{ и } & \tilde{\delta}-2 = 729\tilde{\delta}-2187, \\ 63\tilde{\delta} &= 190, \tilde{\delta}_1 = \frac{190}{63} & 728\tilde{\delta} &= 2185, \tilde{\delta}_2 = \frac{2185}{728}. \end{aligned}$$

Оба корня удовлетворяют соотношению (4). Можно показать, что при $x \leq 2$ данное уравнение корней не имеет.

Ответ: $\frac{190}{63}, \frac{2185}{728}$.

Пример 4. $\sqrt{3\tilde{\delta}^2 + 5\tilde{\delta} + 8} - \sqrt{3\tilde{\delta}^2 + 5\tilde{\delta} + 1} = 1$.

Решение. Положим $\sqrt{3\tilde{\delta}^2 + 5\tilde{\delta} + 8} + \sqrt{3\tilde{\delta}^2 + 5\tilde{\delta} + 1} = t$. Тогда из равенств

$$\sqrt{3\tilde{\delta}^2 + 5\tilde{\delta} + 8} - \sqrt{3\tilde{\delta}^2 + 5\tilde{\delta} + 1} = 1,$$

$$\sqrt{3\tilde{\delta}^2 + 5\tilde{\delta} + 8} + \sqrt{3\tilde{\delta}^2 + 5\tilde{\delta} + 1} = t$$

путем перемножения получаем $3\tilde{\delta}^2 + 5\tilde{\delta} + 8 - 3\tilde{\delta}^2 - 5\tilde{\delta} - 1 = t$, т.е. $t=7$.

А теперь сложим равенства

$$\sqrt{3\tilde{\delta}^2 + 5\tilde{\delta} + 8} - \sqrt{3\tilde{\delta}^2 + 5\tilde{\delta} + 1} = 1,$$

$$\sqrt{3\tilde{\delta}^2 + 5\tilde{\delta} + 8} + \sqrt{3\tilde{\delta}^2 + 5\tilde{\delta} + 1} = 7.$$

Получаем $2 \cdot \sqrt{3\tilde{\delta}^2 + 5\tilde{\delta} + 8} = 8$, т.е. $\sqrt{3\tilde{\delta}^2 + 5\tilde{\delta} + 8} = 4$.

Отсюда $\tilde{\delta}_1 = 1, \tilde{\delta}_2 = -\frac{8}{3}$.

Ответ: $1, -\frac{8}{3}$.

Пример 5. $\tilde{\delta}^2 - 5\tilde{\delta} - 4\sqrt{\tilde{\delta}} + 13 = 0$.

Решение. Это уравнение можно переписать так:

$$\tilde{\delta}^2 - 6\tilde{\delta} + 9 + \tilde{\delta} - 4\sqrt{\tilde{\delta}} + 4 = 0, \text{ т.е.}$$

$$(\tilde{\delta}-3)^2 + (\sqrt{\tilde{\delta}}-2)^2 = 0.$$

Это возможно лишь при условии, что

$$\begin{cases} \tilde{\delta}-3=0, \\ \sqrt{\tilde{\delta}}-2=0, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} \tilde{\delta}=3, \\ \tilde{\delta}=4, \end{cases} \text{ и система противоречива.}$$

Ответ: уравнение корней не имеет.

Пример 6. $\sqrt{\tilde{\delta}+5} = \tilde{\delta}^2 - 5.$

Пример 7. $\sqrt[3]{2-\tilde{\delta}} = 1 - \sqrt{\tilde{\delta}-1}.$

Пример 8. $\sqrt{\frac{1+2\tilde{\delta}\sqrt{1-\tilde{\delta}^2}}{2}} = 1 - 2\tilde{\delta}^2.$

Пример 9. $\sqrt{3\tilde{\delta}^2-1} - \sqrt{3\tilde{\delta}^2+2\tilde{\delta}+1} = \sqrt{\tilde{\delta}^2+2\tilde{\delta}+4} - \sqrt{\tilde{\delta}^2-\tilde{\delta}+1}.$ Ответ: -1.

Пример 10. $\frac{1+\tilde{\delta}-\sqrt{2\tilde{\delta}+\tilde{\delta}^2}}{1+\tilde{\delta}+\sqrt{2\tilde{\delta}+\tilde{\delta}^2}} = 27 \cdot \frac{\sqrt{2+\tilde{\delta}}+\sqrt{\tilde{\delta}}}{\sqrt{2+\tilde{\delta}}-\sqrt{\tilde{\delta}}}.$ Ответ: уравнение корней не имеет.

Задачи для самостоятельного решения: №1-№20 стр. 117-118 [7].

(Урок 17-18).

Цель: познакомить учащихся с общей схемой решения иррациональных неравенств; сформировать навык применения равносильности при решении иррациональных неравенств.

Теоретическая часть. При решении иррациональных неравенств необходимо помнить, что корни нечетной степени рассматриваются при всех действительных значениях подкоренных выражений, а корни четной степени – только арифметические,

т. е. из $\sqrt[n]{x} = a$ следует $\tilde{\delta} \geq 0, a \geq 0.$

С помощью методов решения иррациональных уравнений иррациональное неравенство свести к простейшему виду $\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \left(\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \right)$

Дальше рассуждаем примерно так.

1. $f(x) \geq 0$, решаем это неравенство.
2. Изучаем правую часть исходного неравенства:
 - а) если $g(x) < 0$, то решение примера заканчивается выписыванием ответа, полученного в пункте 1 (левая часть заведомо больше правой).
 - б) если $g(x) > 0$, то обе части исходного неравенства возводим в степень $2n$. Получаем $f(x) > (g(x))^{2n}$, решаем это неравенство.
3. С учетом решения в пункте 1, выписываем ответ.

Замечание: При решении неравенства $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$ рассуждаем аналогично.

Для удобства полученные решения изображаем на числовых осях.

К решению неравенств можно подходить иначе, используя равносильность:

1. Иррациональное неравенство $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ \left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^{2n} < (g(x))^{2n}. \end{cases}$$

2. Иррациональное неравенство $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности

двух систем неравенств:

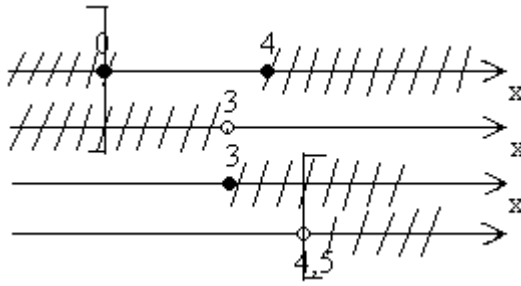
$$\left[\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^{2n} > (g(x))^{2n}; \end{cases} \right. \left. \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \right]$$

Практическая часть. Рассматриваем по одному примеру каждого типа, решение которых рассматривается двумя способами. Учащиеся сами должны определиться, какой из предложенных способом для них проще, и далее они могут решать неравенства любым из предложенных способов.

Пример 1. $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$.

Решение: 1 способ.

1. Решаем неравенство $x^2 - 4x \geq 0$, получаем $x(x - 4) \geq 0$, $x \leq 0$ и $x \geq 4$.
2. а) если $x - 3 < 0$, т. е. $x < 3$, то получаем ответ 1: $(-\infty; 0]$;
б) если $x - 3 \geq 0$, т. е. $x \geq 3$, то получаем: $x^2 - 4x > (x - 3)^2$, т. е. $2x > 9$, т. е. ответ 2: $(4, 5; \infty)$;



Объединяя ответы 1 и 2, получаем окончательный $(-\infty; 0] \cup (4,5; \infty)$.

$$2 \text{ способ. } \begin{cases} x-3 \geq 0, \\ x^2-4x > (x-3)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x^2-4x-x^2+6x-9 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq 4, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4,5, \\ x \leq 0. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup (4,5; \infty)$.

Пример 2. $\sqrt{x+6} < x-5$.

Решение. 1 способ.

1. Решаем неравенство $x+6 \geq 0$. Отсюда $x \geq -6$.

2. а) Если $x-5 < 0$, т. е. $x < 5$, то исходное неравенство решений не имеет (левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна).

б) Если $x-5 > 0$, т. е. $x > 5$, то получим $x+6 < (x-5)^2 \Rightarrow x+6 < x^2-10x+25 \Rightarrow$

$$x^2-11x+19 > 0, \text{ т. е. } \left(x - \frac{11-3\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{11+3\sqrt{5}}{2}\right) > 0.$$

С учетом решения в пункте 1 получаем $x \in \left(\frac{11+3\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$.

Ответ: $\left(\frac{11+3\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$.

$$2 \text{ способ. } \begin{cases} x+6 \geq 0, \\ x-5 > 0, \\ x+6 < (x-5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -6, \\ x > 5, \\ x+6-x^2+10x-25 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5, \\ x^2-11x+19 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 5, \\ \begin{cases} x < \frac{11-3\sqrt{5}}{2}, \\ x > \frac{11+3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{11+3\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $\left(\frac{11+3\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$.

Пример 3. $\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2,$

Пример 4. $\sqrt{x+61} < x+5,$

Пример 5. $x-3 < \sqrt{x-2},$

Пример 6. $\sqrt{3x-x^2} < 4-x,$

Пример 7. $\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}} < 0,$

Пример 8. $\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3} > 0,$

Пример 9. $\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2},$

Пример 10. $\frac{6x}{x-2} - \sqrt{\frac{12x}{x-2}} - 2^4 \sqrt{\frac{12x}{x-2}} > 0.$

Примеры для самостоятельного решения:

№1-№5 стр.163-164 [7], №9.188, 9.192, 9.208, 9.211, 9.230, 9.257, 9.258, 9.259, 9.260 [8].

(Урок 19-20).

Цель: познакомить с общими подходами к решению уравнений с параметрами и рассмотреть примеры их решения; сформировать навык решения иррациональных уравнений и неравенств, содержащих параметры.

Теоретическая часть.

1) Общие сведения о параметрах. Изучение многих физических процессов и геометрических закономерностей часто приводит к решению задач с

параметрами. Наиболее трудной и важной частью решения таких задач является исследование процесса в зависимости от параметров.

Задачи с параметрами часто встречаются на вступительных экзаменах по математике и столь же часто оказываются не по силам абитуриентам. Это, вообще говоря, не удивительно, поскольку у большинства учащихся нет должной свободы в общении с параметрами. Задачи с параметрами отличаются особым разнообразием и нестандартностью. Не случайно без них, как правило, не обходятся олимпиады всех уровней, вступительные экзамены в наиболее престижные вузы. «Появление таких заданий на экзаменах далеко не случайно, так как с их помощью проверяется техника владения формулами элементарной математики, методами решения уравнений и неравенств, умение выстраивать логическую цепочку рассуждений (без чего решение задачи с параметрами невозможно) и, в конечном итоге, уровень логического мышления учащихся.

Несмотря на то, что программа по математике средней общеобразовательной школы не упоминает в явном виде о задачах с параметрами, было бы ошибкой утверждать, что этот вопрос никоим образом не освещается в рамках школьного курса математики.

Достаточно вспомнить школьные уравнения $x^2 = a$, $ax^2 + bx + c = 0$, $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, в которых a , b , c есть не что иное, как параметры. Считаем, что задачам с параметрами следовало бы уделять больше внимания. Они представляют чисто математический интерес, способствуют интеллектуальному развитию учащихся, служат хорошим материалом для отработки навыков.

Задачи с параметрами вызывают у многих если не панический страх, то, по крайней мере, чувство неудобства. Большинство учащихся либо вовсе не справляются с такими задачами, либо приводят громоздкие выкладки, лишённые к тому же логической стройности. Причиной этого является отсутствие системы заданий по данной теме в школьных учебниках.

В самом начале знакомства с параметром у учеников возникает некий психологический барьер, который обусловлен противоречивыми

характеристиками параметра. С одной стороны, параметр в уравнении следует считать величиной постоянной, а с другой - конкретное значение параметра неизвестно. С одной стороны, параметр является величиной постоянной, а с другой – может принимать различные значения. Получается, что параметр – это неизвестная известная, переменная постоянная величина. Этот «каламбур» очень точно отражает существо тех сложностей, которые нужно преодолеть ученикам.

Целесообразно изучение уравнений с параметрами начинать с решения простых уравнений без ветвлений. Например:

1) $x - a = 0$, ответ: при $a \in (-\infty; \infty) x = a$;

2) $5x = a$, ответ: при $a \in (-\infty; \infty) x = \frac{a}{5}$;

3) $x : 2 = a$, ответ: при $a \in (-\infty; \infty) x = 2a$;

4) $|x| = |a|$, ответ: при $a \in (-\infty; \infty) x = \pm a$;

5) $x^3 = a$, ответ: при $a \in (-\infty; \infty) x = \sqrt[3]{a}$.

Подобные упражнения помогают учащимся привыкнуть к параметру, к необычной форме ответов при решении уравнений.

В качестве второго шага на пути изучения уравнений с параметрами можно выделить решение простейших уравнений с небольшим числом легко угадываемых ветвлений. Примеры таких уравнений приведены ниже.

1) $ax = 10$.

Ответ: при $a \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty) \tilde{a} = \frac{10}{a}$, при $a = 0$ корней нет.

Чтобы из-за скобок и значков запись ответа не показалась устрашающей, ее можно записать так: «при $a \neq 0 \quad \tilde{a} = \frac{10}{a}$, при $a = 0$ корней нет». Это, пожалуй, тот случай, когда методико–математическая уловка может иметь значительный психологический вес.

2) $0 \cdot x = a$.

Ответ: при $a \neq 0$, корней нет, при $a = 0$ x – любое число.

3) $\tilde{a} = \sqrt{a}$.

Ответ: при $\dot{a} \geq 0, \tilde{\delta} = \sqrt{\dot{a}}$, при $a < 0$ корней нет.

4) $|x| < a$.

Ответ: при $a < 0$ корней нет, при $a > 0$ $x = \pm a$.

5) $(\dot{a}^2 - 4) \cdot \tilde{\delta} = \dot{a}^2 + \dot{a} - 6$.

Решение: Если $\dot{a}^2 - 4 \neq 0$, то есть $\dot{a} \neq 2$, то $\tilde{\delta} = \frac{\dot{a}^2 + \dot{a} - 6}{\dot{a}^2 - 4} = \frac{(\dot{a} + 3)(\dot{a} - 2)}{(\dot{a} - 2)(\dot{a} + 2)} = \frac{\dot{a} + 3}{\dot{a} + 2}$.

Если $\dot{a} = -2$, то $0 \cdot x = -4$, то есть уравнение не имеет корней.

Если $\dot{a} = 2$, то $0 \cdot x = 0$, то есть x – любое.

Ответ: при $\dot{a} \neq 2$ $x = \frac{\dot{a} + 3}{\dot{a} + 2}$, при $\dot{a} = -2$ корней нет, при $\dot{a} = 2$ x – любое действительное число.» [9] стр. 73-76.

Задания, включенные в экзаменационный сборник, представляют собой наиболее распространенные виды задач с параметрами. Мы рассмотрим примеры рациональных уравнений и неравенств с параметрами, вошедшие в экзаменационный сборник и централизованное тестирование 2003 года.

2) Определение: уравнение $f(a, b, c, \dots, k, x) = \phi(a, b, c, \dots, k, x)$ называется иррациональным с одним неизвестным x , если одна или две части содержат выражения, иррациональные относительно x . Например, уравнения $2\tilde{\delta} - \sqrt{3\tilde{\delta} - 4} = \sqrt{\dot{a} + 1}$; $\sqrt{2\tilde{\delta} - \dot{a}} + 3\tilde{\delta} = 2$; $\sqrt[3]{\tilde{\delta} - b} - x = \sqrt[3]{2x + a} + 1$ иррациональные относительно x . здесь a и b – параметры. При отыскании действительных корней уравнения, необходимо помнить, что $\sqrt[n]{F(a, b, c, \dots, k, x)} \geq 0$ при $F(a, b, c, \dots, k, x) \geq 0$ и n – четном, т. е. $n = 2k$ (k – натуральное), рассматриваются только арифметические значения $\sqrt[n]{F(a, b, c, \dots, k, x)}$.

Решение таких уравнений сводится к постепенному переходу от иррационального уравнения к рациональному путем возведения в степень обеих частей уравнения. Но известно, что в таком случае возможно появление посторонних корней. Следовательно, решение должно сопровождаться тщательной проверкой, или необходимо следить за равносильностью уравнений и неравенств, получаемых в результате преобразований.

3) Графический метод. В графическом методе параметр a и аргумент x совершенно равноправны, и только для оформления ответа приходится «распределять роли» между ними. Рассмотрим уравнения вида $f(x, a) = g(x, a)$ или неравенства вида $f(x, a) > g(x, a)$. Пусть ставится задача о нахождении решения такого уравнения или неравенства (при всех допустимых значениях параметра) или задача об исследовании свойств множества решений такого уравнения (неравенства). Для решения этой задачи в координатной плоскости xOy строим графики функций $y = f(x, a)$ и $y = g(x, a)$, задающие на плоскости (в зависимости от параметра a) семейства кривых. Затем, анализируя эти семейства кривых, получаем нужную информацию о решениях задачи.

Для реализации указанного метода можно дать общую рекомендацию: по возможности «собрать» параметр в одной части (левой или правой), то есть привести данное уравнение (неравенство) к виду $f_1(x, a) = g_1(x)$ (соответственно, $f_1(x, a) > g_1(x)$). Делается это для того, чтобы при изменении параметра «двигался» только график функции

$y = f_1(x, a)$, а график $y = g_1(x)$ оставался неподвижным. Если это не удастся сделать непосредственно, можно попытаться сделать замену переменной.

Практическая часть. Пример 1. Решите уравнение $|x - a| = 3x - 1$.

Решение. Это уравнение с параметром a . По определению модуля $3x - 1 \geq 0$, т. е.

$\tilde{a} \geq -\frac{1}{3}$. Рассмотрим два случая:

а) Если $x - a \geq 0$, то уравнение примет вид $x - a = 3x - 1$, $2x = 1 - a$, $\tilde{a} = \frac{1 - \tilde{a}}{2}$, так как $\tilde{a} \geq -\frac{1}{3}$, то $\frac{1 - \tilde{a}}{2} \geq -\frac{1}{3}$, поэтому $\tilde{a} \leq \frac{1}{3}$.

б) Если $x - a < 0$, то уравнение примет вид $-x + a = 3x - 1$, $4x = a + 1$, $\tilde{a} = \frac{\tilde{a} + 1}{4}$, так как $\tilde{a} \geq -\frac{1}{3}$, то $\frac{\tilde{a} + 1}{4} \geq \frac{1}{3}$, поэтому $\tilde{a} \geq \frac{1}{3}$. Итак: $\tilde{a}_1 = \frac{1 - \tilde{a}}{2}$ и $\tilde{a}_2 = \frac{\tilde{a} + 1}{4}$.

При $\tilde{a} = \frac{1}{3}$ имеем $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 = \frac{1}{3}$.

Ответ: если $\tilde{a} \leq \frac{1}{3}$, то $\tilde{a}_1 = \frac{1 - \tilde{a}}{2}$, если $\tilde{a} > \frac{1}{3}$, то $\tilde{a} = \frac{\tilde{a} + 1}{4}$.

Пример 2. $\frac{a}{3a - 2\delta} = 6$.

Решение. Считая, что знаменатель не равен нулю, выразим x через a , т. е.

решим уравнение относительно x : $a = 18a - 12x$, $12x = 17a$, $\delta = \frac{17}{12} \cdot a$.

Теперь вернемся к исходному уравнению. Подстановка $\delta = \frac{17}{12} \cdot a$ в это уравнение обращает его в верное равенство, кроме случаев, когда $3a - 2x = 0$,

т. е. $3a - 2 \cdot \frac{17}{12} \cdot a \neq 0$, $a \left(3 - \frac{17}{6} \right) \neq 0$, $a \neq 0$. Таким образом, при $a = 0$ уравнение не

имеет корней, а при $a \neq 0$ уравнение имеет корни $\delta = \frac{17}{12} \cdot a$.

Ответ: корней нет при $a = 0$ и $\delta = \frac{17}{12} \cdot a$ при $a \neq 0$.

Замечание: Однотипными можно считать №6.207 – 6.210 из экзаменационного сборника [4] «Решите уравнение». Это требование можно понимать как «Решите уравнение для всех значений параметра a ». В задачах №6.211 - №6.218 сгруппированы задачи типа «Найдите все значения a , при которых данное число является (не является) корнем заданного уравнения». В заданиях №6.221 и №6.222 следует использовать свойства четности или нечетности функций и соответствующую симметрию графиков.

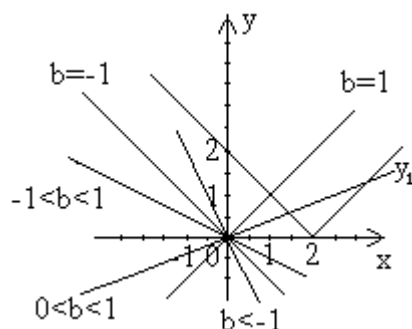
Рассмотрим уравнение $f(x)=g(x)$, где обе функции четные. Их графики симметричны относительно оси y . Если графики не имеют общей точки на оси y , то число корней (точек пересечения графиков $f(x)$ и $g(x)$, если оно есть) – четное. Если общая точка на оси y имеется, т. е. $f(0)=g(0)$, то число корней нечетно. (Предполагается, что число корней конечно.) Рассуждая подобным образом, можно прийти также к выводу о том, что если функция $F(x)$ - четная, то уравнение $F(x)=0$ имеет четное число корней, кроме случая, когда $F(0)=0$, т. е. график $F(x)$ касается оси x в начале координат.

Задания 6.229 - №6.232 удобно решать графоаналитическим способом.

Пример 3. Для каждого значения a найти число корней уравнения $|x-2| + x = ax$.

Решение. Переписав уравнение в виде $|x-2| = x(a-1)$, обозначим $a-1=b$. Пришли к уравнению

$|x-2| = bx$. Строим график $y_1 = |x-2|$ и несколько характерных графиков $y_2 = bx$



для различных b .

Из рисунка видно, что при $b < -1$ имеем одно решение, при $-1 < b < 1$ – нет решений, при $b = 0$ – одно решение, при $0 < b < 1$ – два решения и при $b \geq 1$ – одно решение. Возвращаясь к исходному уравнению и подставляя вместо b его значение $a-1$, получим ответ.

Ответ: при $a < 0$ – одно решение, при $0 \leq a < 1$ – нет решений, при $a = 1$ – одно решение, при $1 < a < 2$ – два решения, при $a \geq 2$ – одно решение.

Пример 4. Найти все значения параметра a , при котором неравенство $\sqrt{1-\delta^2} > a - x$ имеет, по крайней мере, одно решение.

Решение. Графиком функции $\delta = \sqrt{1-\delta^2}$ является верхняя полуокружность с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом 1.

Функция $\delta = a - \delta$ для каждого фиксированного значения параметра a задает прямую, параллельную биссектрисе 2 и 4 координатных углов. Следовательно, уравнение $\delta = a - \delta$ на координатной плоскости xOy задает семейство прямых, параллельных указанной биссектрисе.

Данное неравенство будет иметь по крайней мере одно решение лишь при тех значениях параметра a , при которых найдутся точки полуокружности, расположенные выше соответствующих точек прямой. Такие точки появятся лишь тогда, когда прямая $\delta = a - \delta$ располагается слева от касательной к верхней полуокружности, параллельно биссектрисе 2 и 4 координатных углов.

Учитывая, что указанная касательная принадлежит семейству прямых $\phi = \alpha - \tilde{\phi}$, найдем значение параметра, соответствующее моменту касания. Для этого вначале запишем систему уравнений, из которых определяются координаты точек пересечения прямой $\phi = \alpha - \tilde{\phi}$ и окружности с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом 1:

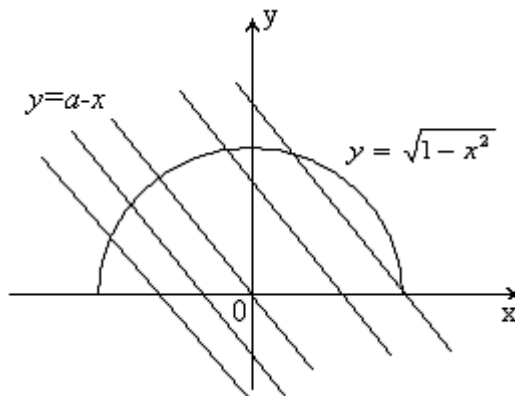
$$\begin{cases} \phi = \alpha - \tilde{\phi}, \\ \tilde{\phi}^2 + \phi^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi = \alpha - \tilde{\phi}, \\ \tilde{\phi}^2 + (\alpha - \tilde{\phi})^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi = \alpha - \tilde{\phi}, \\ 2\tilde{\phi}^2 - 2\alpha\tilde{\phi} + \alpha^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

система должна иметь единственное решение, значит $D=0$ для второго уравнения, то есть

$$D = 4\alpha^2 - 8 \cdot (\alpha - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 2 \Leftrightarrow \alpha = \pm\sqrt{2}.$$

значение параметра $\alpha = \sqrt{2}$ соответствует касательной к полуокружности, лежащей в верхней полуплоскости, и является искомым.

Таким образом, при $\alpha < \sqrt{2}$ данное неравенство имеет по крайней мере одно решение, а при $\alpha \geq \sqrt{2}$ оно решений не имеет.



Ответ: $\alpha \in (-\infty; \sqrt{2})$.

Пример 5. Решите уравнение $\sqrt{\tilde{\phi}^2 + \alpha\tilde{\phi} - 2\alpha} = \tilde{\phi} + 1$.

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\tilde{\phi}^2 + \alpha\tilde{\phi} - 2\alpha = \tilde{\phi}^2 + 2\tilde{\phi} + 1,$$

$$(\alpha - 2) \cdot \tilde{\phi} = 2\alpha + 1.$$

1) Если $\alpha=2$, то $0 \cdot x=5$ – нет решений,

2) Если $\alpha \neq 2$, то $\tilde{\phi} = \frac{2\alpha + 1}{\alpha - 2}$.

Проверка. Если $\tilde{\phi} = \frac{2\alpha + 1}{\alpha - 2}$, то в левой части уравнения получим:

$$\sqrt{\frac{(2\dot{a}+1)^2}{(\dot{a}-2)^2} + \frac{\dot{a} \cdot (2\dot{a}+1)}{\dot{a}-2}} - 2\dot{a} = \sqrt{\frac{(2\dot{a}+1)^2 + (2\dot{a}^2 + \dot{a}) \cdot (\dot{a}-2) - 2\dot{a} \cdot (\dot{a}-2)}{(\dot{a}-2)^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{4\dot{a}^2 + 4\dot{a} + 1 + 2\dot{a}^3 - 4\dot{a}^2 + \dot{a}^2 - 2\dot{a} - 2\dot{a}^3 + 8\dot{a}^2 - 8\dot{a}}{(\dot{a}-2)^2}} = \sqrt{\frac{9\dot{a}^2 - 6\dot{a} + 1}{(\dot{a}-2)^2}} = \sqrt{\frac{(3\dot{a}-1)^2}{(\dot{a}-2)^2}} = \left| \frac{3\dot{a}-1}{\dot{a}-2} \right|,$$

в правой части –

$$\frac{2\dot{a}+1}{\dot{a}-2} + 1 = \frac{2\dot{a}+1+\dot{a}-2}{\dot{a}-2} = \frac{3\dot{a}-1}{\dot{a}-2}.$$

Левая и правая части равны, $\dot{a} \leq \frac{1}{3}$ и $\dot{a} > 2$.

При $\frac{1}{3} < \dot{a} \leq 2$ решений нет.

Ответ: если $\frac{1}{3} < \dot{a} \leq 2$, то решений нет; если $\dot{a} \leq \frac{1}{3}$ или $\dot{a} > 2$, то корнем уравнения является $\frac{2\dot{a}+1}{\dot{a}-2}$.

Пример 6. Для каждого допустимого значения параметра a решите уравнение $\sqrt{\sqrt{\tilde{a}} + 2\dot{a}\sqrt[4]{\tilde{a}}} = 1 - \sqrt[4]{\tilde{a}}$.

Решение. В данном уравнении допустимыми являются любые значения параметра $\dot{a} \in \mathbb{R}$. При любом a данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} 1 - \sqrt[4]{\tilde{a}} \geq 0, \\ \sqrt{\tilde{a}} + 2\dot{a}\sqrt[4]{\tilde{a}} = (1 - \sqrt[4]{\tilde{a}})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt[4]{\tilde{a}} \geq 0, \\ \sqrt{\tilde{a}} + 2\dot{a}\sqrt[4]{\tilde{a}} = 1 - 2\sqrt[4]{\tilde{a}} + \sqrt{\tilde{a}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{\tilde{a}} \leq 1, \\ \dot{a} \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt[4]{\tilde{a}} = \frac{1}{2(\dot{a}+1)}, \\ 0 \leq \frac{1}{2(\dot{a}+1)} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{a} = \frac{1}{16(\dot{a}+1)^4}, \\ \dot{a} \geq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: если $\dot{a} \geq -\frac{1}{2}$, то $\tilde{a} = \frac{1}{16(\dot{a}+1)^4}$;

если $\dot{a} < -\frac{1}{2}$, то уравнение решений не имеет.

Пример 7. Для каждого значения a найти число корней уравнения $|x - 2| + x = ax$.

Пример 8. Найдите наибольшее целое значение параметра a , при котором система неравенств

$$\begin{cases} |\tilde{\sigma} - 4|(\tilde{\sigma} - 6) \geq 0 \\ \tilde{\sigma}^2 - \dot{a}^2 < 0 \end{cases} \text{ не имеет решений.}$$

Задания для самостоятельного решения.

№6.207 - №6.218, №6.221, №6.222, №6.229 - №6.232 [4].

Так как объем материала большой, то можно предложить учащимся провести исследовательскую работу и то, что сказано в замечании оформить в виде публикации или презентации. (Тогда учитель только ставит задачу перед учащимися, а они под руководством учителя ее решают.)

(Урок 21-22).

Цель: совершенствование навыков решения иррациональных уравнений и неравенств.

Теоретическая часть. Учащиеся делятся на группы и готовят теоретические вопросы, которые вызвали наибольшее затруднение. Обсудив в группе эти вопросы и не найдя на них желаемого ответа, учащиеся обращаются к другой группе. Если ответ опять не удовлетворил учащихся, то учитель еще раз останавливается на данных вопросах. Из опыта своей работы я знаю, что ученики сразу задают вопрос о решении иррациональных неравенств с параметрами, поэтому этот вопрос следует рассмотреть еще раз.

Практическая часть.

Пример 1. При любом допустимом значении параметра a решить неравенство $\sqrt{\tilde{\sigma}^2 - 2\dot{a}\tilde{\sigma}} < 3a - x$.

Решение. Параметр a —любое действительное число. Преобразуем неравенство к виду $\sqrt{(\tilde{\sigma} - \dot{a})^2 - \dot{a}^2} < 2a - (x - a)$ и сделаем замену $x - a = t$.

Получим уравнение $\sqrt{t^2 - a^2} < 2a - t$, которое равносильно системе

$$\begin{cases} t^2 - a^2 \geq 0, \\ 2a - t \geq 0, \\ t^2 - a^2 < (2a - t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |t| \geq |a|, \\ t \leq 2a, \\ 4at < 5a^2. \end{cases} \quad (1)$$

1) Если $a=0$, то система не имеет решений.

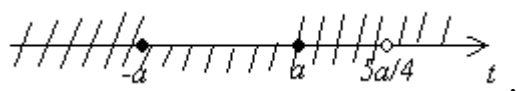
2) При $a \neq 0$ рассмотрим два случая ($a > 0$ и $a < 0$):

$$\text{а) Если } a > 0, \text{ то } \begin{cases} |t| \geq a, \\ t \leq 2a, \\ t < \frac{5a}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -a, \\ t \geq a, \\ t < \frac{5a}{4}. \end{cases}$$

Множество решений M последней системы является пересечением множеств

$$M_1 = (-\infty; -a] \cup [a; \infty) \text{ и } M_2 = \left(-\infty; \frac{5a}{4}\right).$$

$$\text{Итак, } \dot{t} = \dot{t}_1 \cap \dot{t}_2 = (-\infty; -a] \cup \left[a; \frac{5a}{4}\right) \quad (2)$$



б) Если $a < 0$, то

$$\begin{cases} |t| \geq -a, \\ t \leq 2a, \\ 4a\left(t - \frac{5a}{4}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |t| \geq -a, \\ t \leq 2a, \\ t > \frac{5a}{4}. \end{cases}$$

Видим, что система не имеет решений, поэтому при $a < 0$ решений нет.

Итак, система (1) имеет решение лишь при $a > 0$. Используя полученное множество решений (2) системы (1) и возвращаясь к переменной x , получим искомое множество решений исходного неравенства (при любом $a > 0$):

$$\begin{cases} t \leq -a, \\ a \leq t < \frac{5a}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - a \leq -a, \\ a \leq x - a < \frac{5a}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ 2a \leq x < \frac{9a}{4}. \end{cases}$$

Ответ. Если $a > 0$, то $x \in (-\infty; 0] \cup \left[2a; \frac{9a}{4}\right)$; если $a \leq 0$, то решений нет.

Далее рассматриваются примеры, предложенные учащимся для самостоятельного решения, которые вызвали наибольшее затруднение.

Задания для самостоятельного решения. №1-№9 стр.174, №11, №14, №15, №16 стр.174-175. [7].

Замечание: 1) Учащимся необходимо сообщить, что на последнем занятии по этой теме будут предложены задания для самостоятельного решения, с целью

определения рейтинга учащихся, однако эти оценки не будут выставлены в журнал.

2) Решение неравенств, как правило, вызывает наибольшее затруднение, поэтому учащимся предлагается для самостоятельного решения рациональные и иррациональные неравенства. Но учитель может изменить задания, учитывая уровень подготовки учеников. Главное, чтобы они были достаточно сложны, но доступны. В противном случае, ученики потеряют интерес и разуверятся в свои силы.

(Урок 23-24).

Цель: контроль уровня усвоения способов и методов решения иррациональных уравнений и неравенств, в том числе, содержащих параметры.

Практическая часть. Ученикам предлагаются типовые задачи различных уровней сложности по данной теме, которые предлагались абитуриентам на вступительном экзамене в БФ СГУ и другие вузы города. Перед учащимися ставится задача: набрать максимальное количество баллов.

1. Решите уравнения: 1) $\sqrt{3\delta^2 + 5\delta + 8} + \sqrt{3\delta^2 + 5\delta + 3} = 1$, (3 б.)

$$2) \sqrt{4 - 7\delta|\delta + 2|} = 3\delta + 2, \quad (3 \text{ б.})$$

$$3) \sqrt[3]{2\delta - 1} + \sqrt[3]{\delta - 1} = 1, \quad (3 \text{ б.})$$

$$4) \sqrt{\delta^2 + \delta - 6} + \sqrt{2\delta + 3} = \sqrt{1 - \delta}, \quad (4 \text{ б.})$$

$$5) \sqrt{\delta - 1} + \sqrt{\delta + 3} + 2\sqrt{(\delta - 1)(\delta + 3)} = 4 - 2\delta, (5 \text{ б.})$$

2. 6) Найдите натуральный корень уравнения $1 + \sqrt{3\delta^2 + 22} = 2|\delta|$, (5 б.)

7) Найдите координаты общих точек графиков функций $\phi = -2\delta - 1$ и $\phi = \sqrt{2\delta + 3}$, (5 б.)

8) Найдите количество целых решений уравнения $\sqrt{\delta^2 - 6\delta + 9} + \sqrt{25 + 10\delta + \delta^2} = 8$, (6 б.)

9) Найдите все значения параметра a , при которых не имеет корней уравнение

$$\sqrt{2\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\alpha}\tilde{\alpha} + 2\tilde{\alpha} + 10} = \tilde{\alpha} - 1,$$

(10 б.)

3. Решите неравенства: 10) $\frac{\sqrt{(\tilde{\alpha}^2 - 25)(\tilde{\alpha} - 1)}}{4\tilde{\alpha} - 32} \leq 0$, (5 б.)

$$11) \sqrt{3 - \tilde{\alpha}} > \tilde{\alpha} - 2, \quad (6 \text{ б.})$$

$$12) \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + 4} + \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + 1} \leq 3 - 5\tilde{\alpha}^2, (6 \text{ б.})$$

4. 13) Найдите число целых решений неравенства $\sqrt[3]{5\tilde{\alpha} - 6} \cdot \sqrt[4]{-\tilde{\alpha}^2 + 2\tilde{\alpha} + 8} \geq 0$, (6 б.)

14) Для каждого допустимого значения параметра a решить неравенство $2\sqrt{\tilde{\alpha} + \tilde{a}} > \tilde{\alpha} + 1$.

(10 б.)

Ответы: 1) $-\frac{8}{3}; 1$, 2) 0, 3) 1, 4) нет корней, 5) 1, 6) 7, 7) $(-1; 1)$, 8) 9, 9)

$$\tilde{a} \in (-4; \infty),$$

$$10) [-5; 1] \cup [5; 8), \quad 11) (-\infty; -2) \cup \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; 3 \right], \quad 12) 3, \quad 13) 3, \quad 14) \text{ если } \tilde{a} \leq 0, \text{ то}$$

$$\text{решений нет; если } 0 < a \leq 1, \text{ то } x \in (1 - 2\sqrt{a}; 1 + 2\sqrt{a}), \text{ если } a > 1, \text{ то } x \in [-a; 1 + 2\sqrt{a})$$

Замечания: 1) замена $3x^2 + 5x + 3 = t$,

2) так как $3x + 2 \geq 0$, то $x + 2 > 0$, тогда $|x - 2| = x - 2$,

3) воспользоваться формулой $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$,

4) достаточно найти ОДЗ уравнения,

5) замена $\sqrt{\tilde{\alpha} - 1} + \sqrt{\tilde{\alpha} + 3} = t$,

6) замена $|x| = t$,

7) воспользоваться тем, что первая функция убывающая, а вторая – возрастающая,

8) воспользуемся равенством $\sqrt{\tilde{a}^2} = |\tilde{a}|$,

9) использовать условие отсутствия корней квадратного уравнения,

12) оценить левую и правую части неравенства,

13) учесть, что $\sqrt[4]{a} \geq 0$,

14) легче решать графически.

В конце урока учитель собирает работы для их оценивания. Оставшиеся задания предлагает решить дома.

(Урок 25-26).

Цель: продолжить формирование умений и навыков решения тригонометрических уравнений.

Теоретическая часть. Определение: уравнение, содержащее тригонометрические функции, называется тригонометрическим уравнением.

Основные методы решения тригонометрических уравнений

1. *Простейшие.* К ним относятся уравнения вида $\sin x = a (|a| \leq 1)$, $\cos x = a (|a| \leq 1)$, $\operatorname{tg} x = a$ (где $a \in \mathbb{R}$), $\operatorname{ctg} x = a$ (где $a \in \mathbb{R}$). Формулы решений этих уравнений имеют следующий вид (здесь и в дальнейшем $n \in \mathbb{Z}$ означает, что n — целое число):

$$\sin x = a; x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad (1)$$

$$\cos x = a; x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} x = a; x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad (3)$$

$$\operatorname{ctg} x = a; x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Необходимо повторить частные случаи решения уравнений при $a=0$, $a=1$ и $a=-1$.

Уравнения вида $\sin(\omega x + \varphi) = a$, $\cos(\omega x + \varphi) = a$, $\operatorname{tg}(\omega x + \varphi) = b$, $\operatorname{ctg}(\omega x + \varphi) = b$

($|a| < 1$, $\omega \neq 0$, φ, b — любые действительные числа) также относятся к простейшим.

Их следует решать сразу по формулам (1)-(4), заменив x на $\omega x + \varphi$.

Необходимо помнить, что: 1) $\arcsin(-a) = -\arcsin a$,

$$2) \arccos(-a) = \pi - \arccos a,$$

$$3) \operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a,$$

$$4) \operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a.$$

Можно напомнить формулы корней уравнений вида:

$$\cos^2 x = a, 0 \leq a \leq 1, x = \pm \arccos \sqrt{a} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin^2 x = a, 0 \leq a \leq 1, x = \pm \arcsin \sqrt{a} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg}^2 x = a, a \in [0; \infty), x = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{a} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

2. *Общий прием.* Он заключается в том, что все тригонометрические функции, которые входят в уравнение, выражают через какую-нибудь одну тригонометрическую функцию, зависящую от одного и того же аргумента.

3. *Методы группировки.* Путем группировки слагаемых уравнение привести к виду, когда левая часть разложена на множители, а правая часть равна нулю. Уравнение распадается на несколько более простых уравнений. При решении уравнений этим методом возможно появление посторонних корней. Чтобы избежать ошибки в ответе, нужно исключить из полученных значений неизвестного те, для которых заданное уравнение не имеет смысла.

4. *Уравнения, решаемые понижением степени.* Если тригонометрическое уравнение содержит $\sin x, \cos x$ в четвертой степени, то применим формулы понижения степени $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha), \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$

5. *Универсальная подстановка.* При решении уравнений вида $a \sin x + b \cos x = c$ удобно применять универсальную подстановку $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, а $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Уравнение становится рациональным. После нахождения его решения надо проверить, не удовлетворяют ли исходному уравнению числа $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

6. *Однородные уравнения и приводимые к ним.* Однородные уравнения, т. е.

уравнения вида:

$$a \cos x + b \sin x = 0,$$

$$a \cos^2 x + b \cos x \sin x + c \sin^2 x = 0,$$

$$a \cos^3 x + b \cos^2 x \sin x + c \cos x \sin^2 x + d \sin^3 x = 0$$

и т. д. (у всех слагаемых сумма показателей одинакова) приводятся к алгебраическим относительно $\operatorname{tg} x$ путем деления обеих частей уравнения на $\cos x \neq 0 (\cos^2 x \neq 0, \cos^3 x \neq 0)$ соответственно.

Некоторые уравнения можно сделать однородными путем замены 1 на

$\cos^2 x + \sin^2 x$ с помощью различных преобразований функций, входящих в

уравнение и т. д. Например:

$$a \cos x + b \sin x + c = 0 \Rightarrow a \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) + 2b \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + c \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow (a - c) \cos^2 \frac{x}{2} + 2b \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - (a + c) \sin^2 \frac{x}{2} = 0$$

получили однородное уравнение второй степени.

7. *Способ подстановки.* Рассмотрим уравнения, для которых удобно применять различные подстановки: 1) $\sin x \cos x = t$;

$$2) \sin x \pm \cos x = t.$$

8. *Введение вспомогательного угла.* Суть метода в том, что некоторую величину представляют как тригонометрическую функцию соответствующего аргумента φ , а затем производят тригонометрические преобразования.

Покажем, что любое линейное уравнение, $a \sin x + b \cos x = c$, где $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$,

можно решить этим методом. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad \text{Так как} \quad \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1, \quad \text{то}$$

точка с координатами $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ лежит на единичной окружности.

Следовательно, существует такое число φ (такой угол φ), что

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Поэтому уравнение $a \sin x + b \cos x = c$ можно записать в виде:

$$\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Последнее уравнение является простейшим тригонометрическим, решение которого известно.

Практическая часть. Уравнениям первых трех типов уделяется достаточно времени на уроках, поэтому их можно не рассматривать (или рассматривать по мере необходимости).

Пример 1. $(1 - \sin x)(\tan^2 x - 3) = 0$.

Решение. Найдем значения x , удовлетворяющие каждому из уравнений

$$1 - \sin x = 0 \text{ или } \operatorname{tg}^2 x - 3 = 0. \text{ Если } \sin x = 1, \text{ то } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Если $\operatorname{tg}^2 x = 3$, т. е. $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$, то $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Однако было бы ошибочным считать ответом объединение полученных решений, так как исходное уравнение не имеет смысла при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, поэтому первое из предполагаемых решений – постороннее.

$$\text{Ответ: } \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 2. $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \frac{1 - \cos 6x}{2} + \frac{1 - \cos 8x}{2} &= \frac{1 - \cos 10x}{2} + \frac{1 - \cos 12x}{2}, \\ 2 - \cos 6x - \cos 8x - 2 + \cos 10x + \cos 12x &= 0, \\ (\cos 10x + \cos 12x) - (\cos 8x + \cos 6x) &= 0, 2 \cos 11x \cos x - 2 \cos 7x \cos x = 0, \\ 2 \cos x (\cos 11x - \cos 7x) &= 0, -2 \cos x \sin 9x \sin 2x = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда: } \cos x = 0, \quad \sin 9x = 0 \quad \text{или} \quad \sin 2x = 0.$$

$$\begin{array}{lll} 9x = \pi k, & 2x = \pi l, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi m, & x = \frac{\pi k}{9}, & x = \frac{\pi l}{2}. \end{array}$$

$$\text{Решение } x = \frac{\pi}{2} + \pi m \text{ является частью множества корней } x = \frac{\pi l}{2} \quad (\text{при } l = 2n + 1).$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}.$$

Пример 3. $4 + 2\tilde{\operatorname{nos}} x = 3 \cos^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } 4 + 2 \cos x &= 3 \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right) \Leftrightarrow 8 + 4 \cos x = 3(1 + \sin x) \Leftrightarrow \\ 3 \sin x - 4 \cos x &= 5. \end{aligned}$$

Последнее уравнение можно решать *разными способами*.

1. Решим его, перейдя к функции $\tilde{\operatorname{nos}} x$ (см. 2.):

$\pm 3\sqrt{1 - \tilde{\operatorname{nos}}^2 x} - 4 \cos x = 5x \Rightarrow 5 + 4 \cos x = 3\sqrt{1 - \cos^2 x}$ (берем «+», т. к. слева выражение положительное). Возведя обе части в квадрат, получим:

$$25 + 40 \cos x + 16 \cos^2 x = 9 - 9 \cos^2 x \Rightarrow 25 \cos^2 x + 40 \cos x + 16 = 0 \Rightarrow (5 \cos x + 4)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cos x + 4 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{4}{5} \Rightarrow x = \pm \left(\pi - \arccos \frac{4}{5} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

2. Воспользуемся универсальной подстановкой $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ (см. 5.):

$$\frac{6t}{1+t^2} - \frac{4(1-t^2)}{1+t^2} = 5 \Rightarrow 6t - 4 + 4t^2 - 5 - 5t^2 = 0 \Rightarrow -t^2 + 6t - 9 = 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 9 = 0 \Rightarrow (t-3)^2 = 0.$$

$$t = 3 \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 3 \Rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} 3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

3. Сведем его к однородному уравнению (см. 6):

$$6 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 4 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 5 \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right),$$

$$-9 \cos^2 \frac{x}{2} + 6 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 0, \quad 9 \cos^2 \frac{x}{2} - 6 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = 0,$$

разделим обе части последнего уравнения на $\cos^2 \frac{x}{2} \neq 0$, получим:

$$9 - 6 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 0, \left(3 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^2 = 0, 3 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0, \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 3, \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} 3 + \pi m, m \in \mathbb{Z},$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} 3 + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

4. Решим с помощью введения вспомогательного угла (см. 8.):

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$: $\frac{3}{5} \sin x - \frac{4}{5} \cos x = 1$,

$\sin \varphi = \frac{3}{5}, \cos \varphi = -\frac{4}{5}$. Поэтому уравнение можно записать в виде:

$$\sin x \sin \varphi + \cos x \cos \varphi = 1, \cos(x - \varphi) = 1, x - \varphi = 2\pi p, p \in \mathbb{Z}, x = \varphi + 2\pi p, p \in \mathbb{Z},$$

$$\varphi = \pm \left(\pi - \arccos \frac{4}{5} \right), x = \pm \left(\pi - \arccos \frac{4}{5} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Проверяем, является ли $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ решением данного уравнения:

$$3 \sin(\pi + 2\pi n) - 4 \cos(\pi + 2\pi n) = -3 + 4 = 1, 1 \neq 1, \text{ значит, не является.}$$

Ответ: $2 \operatorname{arctg} 3 + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ (или $\pm \left(\pi - \arccos \frac{4}{5} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$).

Замечание: сравнивая найденные ответы 2 и 3 с ответами 1 и 4, видим лишь внешнее различие.

Но если $tg \frac{x}{2} = 3$, то $\cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - 9}{1 + 9} = -\frac{4}{5}$.

Пример 4. $\sin^4 x + \cos^4 x - \sin 2x + \frac{1}{2} = 0$.

Решение. Воспользуемся формулой $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$ и перепишем данное уравнение иначе: $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x - 2\sin x \cos x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x \cos x)^2 + 2(\sin x \cos x) - \frac{3}{2} = 0. \text{ Обозначим } \sin x \cos x = t, \text{ т. е. } \sin 2x = 2t.$$

Тогда получаем $2t^2 + 2t - \frac{3}{2} = 0, 4t^2 + 4t - 3 = 0, t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{4}, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = -\frac{3}{2}$.

Тогда $\sin 2x = 1$ или $\sin 2x = -3$. Второе уравнение не имеет корней, тогда

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z, x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Пример 5. $5(1 - \sin 2x) - 16(\sin x - \cos x) + 3 = 0$.

Решение. В примере встречаются разность синуса и косинуса и их произведение. Обозначим $\sin x - \cos x = t$. Отсюда следует

$$\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = t^2 \Rightarrow 2\sin x \cos x = \sin 2x = 1 - t^2.$$

Уравнение примет вид: $5(1 - (1 - t^2)) - 16t + 3 = 0$.

Решая его, получаем корни 3 и $\frac{1}{5}$.

Стало быть, $\sin x - \cos x = 3$ или $\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$. Первое уравнение не имеет

решений, так как $|\sin x - \cos x| \leq \sqrt{2}$, а второе решим с помощью введения

вспомогательного угла, т. е. $\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{5}$. Отсюда

$$x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \cdot \arcsin \frac{\sqrt{2}}{10} + \pi n, x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \cdot \arcsin \frac{\sqrt{2}}{10} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + (-1)^n \cdot \arcsin \frac{\sqrt{2}}{10} + \pi n, n \in Z$.

Замечание: Можно было бы сразу уравнение переписать в виде:

$$5(\sin x - \cos x)^2 - 16(\sin x - \cos x) + 3 = 0, \text{ так как } 1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2.$$

Задания для самостоятельного решения. №1-№5 стр.229, №1-№5 стр.230-231, №1-№7 стр. 233, №1-№5 стр.235 №1-№5 стр.236-237 [7].

(Урок 26-27).

Цель: сформировать навык решения нестандартных тригонометрических уравнений, продолжить развитие логического мышления, умения обобщать и анализировать.

Теоретическая часть. Ищем решение данного нестандартного тригонометрического уравнения путем рассуждений, путем сведения к системе уравнений и т. д. При решении уравнений существенным является *ограниченность* функций синус и косинус.

На экзаменах могут встретиться уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции. Их решение, как правило, основано на *определении* обратных тригонометрических функций и знании их свойств.

Практическая часть. Пример 1. $2^{\cos x} = \cos x + \frac{1}{\cos x}.$

Решение. Левая часть уравнения не больше 2, т. е. $2^{\cos x} \leq 2$, так как $|\cos x| \leq 1$.

Равенство возможно лишь при условии, что $\cos x = 1$. Правая часть должна быть положительна, так как $2^{\cos x} > 0$, а значит, $\cos x > 0$. Кроме того, из этого

следует, что $\cos x + \frac{1}{\cos x} \geq 2$. Равенство возможно лишь при условии, что

$\cos x = 1$. Таким образом, исходное уравнение имеет решение только при условии, что $\cos x = 1$ (тогда $2^1 = 1 + \frac{1}{1}$). Отсюда следует ответ: $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. $\sin^2 5x + 1 = \cos^2 3x.$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\sin^2 5x + 1 - \cos^2 3x = 0 \Rightarrow \sin^2 5x + \sin^2 3x = 0.$$

Но это возможно лишь при условии, что $\sin 5x = 0, \sin 3x = 0$, т. е. данное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \sin 5x = 0, \\ \sin 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \pi k, k \in Z, \\ 3x = \pi n, n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{5}, k \in Z, \\ x = \frac{\pi n}{3}, n \in Z. \end{cases}$$

Приравнивая правые части этих равенств, получаем уравнение $\frac{\pi k}{5} = \frac{\pi n}{3}$, т. е.

$$3k = 5n, \text{ где } k \text{ и } n - \text{целые числа. Это уравнение имеет решение } \begin{cases} k = 5l, \\ n = 3l, \end{cases} \text{ где } l \in Z.$$

Подставляя значения k и n в равенства (1), получаем $x = \pi l$.

Ответ: $\pi l, l \in Z$.

Пример 3. $\cos 3x + \cos \frac{5}{2}x = 2$.

Решение. Так как $|\cos 3x| \leq 1$ и $|\cos \frac{5}{2}x| \leq 1$, то сумма $\cos 3x + \cos \frac{5}{2}x$ равна 2 только в том случае, когда $\cos 3x = 1$ и $\cos \frac{5}{2}x = 1$ одновременно. Следовательно, данное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \cos 3x = 1, \\ \cos \frac{5}{2}x = 1, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} 3x = 2\pi k, \\ \frac{5}{2}x = 2\pi n, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} x = \frac{2}{3}\pi k, \\ x = \frac{4}{5}\pi n. \end{cases}$$

Отсюда получаем $\frac{2}{3}\pi k = \frac{4}{5}\pi n$, т.е. $5k = 6n$, где k и n – целые числа. Это

уравнение имеет решение $\begin{cases} k = 6l, \\ n = 5l, \end{cases}$ где $l \in Z$. Следовательно, исходное уравнение

имеет решение $x = 4\pi l$.

Ответ: $4\pi l, l \in Z$.

Пример 4. $\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \cdot (1 + \tan^2 2y) \cdot (3 + \sin 3z) = 4$.

Решение. Очевидно, что

$$\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \geq 2, \quad 1 + \tan^2 2y \geq 1, \quad 3 + \sin 3z \geq 2.$$

Перемножим почленно эти неравенства, получаем

$$\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 2y) \cdot (3 + \sin 3z) \geq 4.$$

Левая часть равна правой лишь при условии, что $\cos^2 x = 1$, $\operatorname{tg}^2 2y = 0$ и $\sin 3z = -1$ одновременно. Следовательно, данное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \cos^2 x = 1, \\ \operatorname{tg}^2 2y = 0, \\ \sin 3z = -1, \end{cases} \text{ отсюда}$$

$$x = \pi m, m \in \mathbb{Z}; y = \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}; z = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} \pi l, l \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \pi m, m \in \mathbb{Z}; y = \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}; z = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} \pi l, l \in \mathbb{Z}.$$

Пример 5. $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 - \sin^2 3x$.

Решение. Так как $|\cos 4x - \cos 2x| \leq 2$, то левая часть уравнения не превосходит 4, т.е. $(\cos 4x - \cos 2x)^2 \leq 4$.

Правая часть уравнения не меньше 4, т.е. $5 - \sin^2 3x \geq 4$.

Равенство достигается при выполнении условий

$$\begin{cases} 5 - \sin^2 3x = 4, \\ (\cos 4x - \cos 2x)^2 = 4, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} 4 + \cos^2 3x = 4, \\ |\cos 4x - \cos 2x| = 2. \end{cases}$$

Система разбивается на две:

$$\begin{cases} \cos 3x = 0, \\ \cos 4x = -1, \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \cos 3x = 0, \\ \cos 4x = 1, \\ \cos 2x = -1. \end{cases}$$

Легко убедиться, что первая система не имеет решения, а решением второй является $\delta = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 6. $x^2 + 2x \cdot \cos(x - y) + 1 = 0$.

Решение. $x^2 + 2x \cdot \cos(x - y) + \cos^2(x - y) + \sin^2(x - y) = 0$,

$$\text{т.е. } (x + \cos(x - y))^2 + \sin^2(x - y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + \cos(x - y) = 0, \\ \sin(x - y) = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $x - y = \pi k$, т.е. $x = y + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. (2)

При этом значении x первое уравнение принимает вид:

$$y + \pi k + \cos(y + \pi k - y) = 0, \text{ т.е. } y + \pi k + \cos \pi k = 0.$$

Отсюда $y = -\pi k - \cos \pi k = -\pi k + (-1)^{k+1}$. Теперь находим x (см. (2)):

$$x = -\pi k + (-1)^{k+1} + \pi k = (-1)^{k+1}.$$

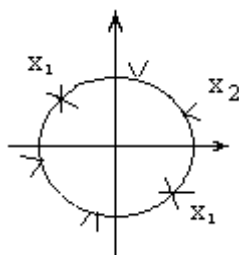
Ответ: $x = (-1)^{k+1}$; $y = (-1)^{k+1} - \pi k$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Пример 7. $\sin 2x - \sin 6x + 2 = 0$.

Решение. Очевидно, что в силу ограниченности функции синус такое уравнение имеет решение в случае одновременно выполнения равенств

$$\begin{cases} \sin 2x = -1, \\ \sin 6x = 1, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ 6x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} k. \end{cases}$$

Из этих решений необходимо выбрать общие решения, т.к. именно при них система обращается в равенства. Изобразим полученные решения на единичной окружности



Из рисунка видно, что общие решения совпадают с $\tilde{\alpha}_1$. Итак: $\tilde{\alpha} = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 8. $\frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = y^2 - 4y + 5$.

Решение. Преобразуем обе части уравнения. В левой части учтем, что

$$tg \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}, \text{ в правой части выделим квадрат разности чисел. Получаем}$$

уравнение:

$$\frac{2 \frac{\sin x/2}{\cos x/2}}{1 + \frac{\sin^2 x/2}{\cos^2 x/2}} = y^2 - 4y + 4 + 1 \Rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = (y-2)^2 + 1 \Rightarrow \sin x = (y-2)^2 + 1.$$

Учтем, что $\sin x \leq 1, (y-2)^2 + 1 \geq 1$. Поэтому уравнение имеет решения только в

случае $\begin{cases} \sin x = 1, \\ (y-2)^2 + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ y = 2. \end{cases}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, y = 2$.

Пример 9. $\sin^{2k+2} x + \cos^{2k+2} x = 1, k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Легко догадаться, что числа $x = \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$ являются решениями уравнения. Однако еще следует доказать, что других решений нет.

Предположим, что существуют решения $x = \alpha \neq \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$. Так как $|\sin \alpha| < 1$ и $|\cos \alpha| < 1$, то $\sin^2 \alpha < 1, \cos^2 \alpha < 1$. Поэтому для любого целого положительного k справедливы неравенства $\sin^{2k+2} \alpha < \sin^2 \alpha, \cos^{2k+2} \alpha < \cos^2 \alpha$. Складывая их, получаем $\sin^{2k+2} \alpha + \cos^{2k+2} \alpha < \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$. Но $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; Следовательно, $\sin^{2k+2} \alpha + \cos^{2k+2} \alpha < 1$ для всех значений $x = \alpha \neq \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Значит, заданное уравнение (в частности, уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$) не имеет решений, отличных от $x = \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 10. $\sin(\pi \cos 2x) = 1$.

Решение. $\pi \cos 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \cos 2x = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}$. Но $|\cos 2x| \leq 1$, поэтому $k=0$.

Имеем: $\cos 2x = \frac{1}{2}, 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Замечание: можно встретить тот же ответ,

записанный в другом виде: $x = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1), n \in \mathbb{Z}$.

Пример 11. $2 \arcsin x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi^2}{9 \arcsin x}.$

Решение. Функция $\arcsin x$ определена при $x \in [-1; 1]$, причем при $x=0$ значение $\arcsin x = 0$. Следовательно, ОДЗ данного уравнения $x \in [-1; 0) \cup (0; 1]$. Введем

новую неизвестную $t = \arcsin x$ и получим рациональное уравнение: $2t = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi^2}{9t}.$

Или $18t^2 - 3\pi t - \pi^2 = 0$. Корни уравнения $t_1 = \frac{\pi}{3}, t_2 = -\frac{\pi}{6}$. Оба корня входят в

область значений функции $\arcsin x$ $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Вернемся к старой переменной.

Имеем уравнения: $\arcsin x = \frac{\pi}{3}, x = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$$\arcsin x = -\frac{\pi}{6}, x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Итак, уравнение имеет два корня $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}.$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}.$

Задания для самостоятельного решения. №1-№5 стр. 240, №1-№30 стр. 240-241 [7], можно также предложить задания к главе 8 из сборника [8].

(Урок 28-29).

Цель: сформировать навык решения тригонометрических неравенств с помощью тригонометрического круга и по формулам, совершенствовать умения и навыки решения систем уравнений, уравнений и неравенств, содержащих параметры и переменную под знаком модуля.

Теоретическая часть. 1. С помощью методов решения тригонометрических уравнений тригонометрические неравенства свести к простейшему виду:

$$\sin x < a(> a), \cos x < a(> a), \operatorname{tg} x < a(> a).$$

Из $\sin x < a, -1 < a < 1$ следует $-\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Из $\sin x > a, -1 < a < 1$ следует $\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

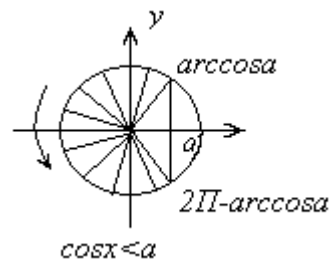
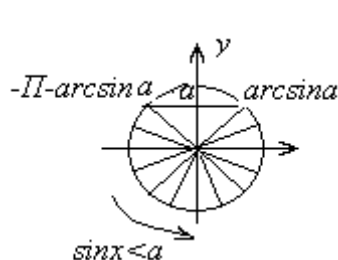
Из $\cos x < a, -1 < a < 1$ следует $\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Из $\cos x > a$, $-1 < a < 1$ следует $-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Из $\operatorname{tg} x < a$ следует $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Из $\operatorname{tg} x > a$ следует $\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Тригонометрические неравенства удобно решать, используя *тригонометрический круг*.



В случае *сложного аргумента* тригонометрической функции рекомендуется обозначить его *новой переменной*, решить для него неравенство, а затем вернуться к старой неизвестной.

Практическая часть.

Пример 1. $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. Обозначим аргумент косинуса $y = 3x - \frac{\pi}{6}$ и получим неравенство

$\cos y \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$. На тригонометрическом круге на оси косинусов отложим

значение $\cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и построим соответствующие углы $y_1 = \frac{3\pi}{4}$ и $y_2 = \frac{5\pi}{4}$.

Тогда неравенству $\cos y \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ удовлетворяют значения $\frac{3\pi}{4} \leq y \leq \frac{5\pi}{4}$. Учтем

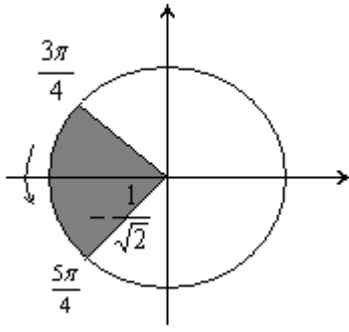
периодичность функции $\cos y$ и получим решения $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq y \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Вернемся к старой неизвестной x и получим двойное линейное неравенство:

$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq 3x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$. Ко всем частям неравенства прибавим число $\frac{\pi}{6}$:

$\frac{11}{12}\pi + 2\pi n \leq 3x \leq \frac{17}{12}\pi + 2\pi n$. Все части неравенства разделим на положительное

число 3. При этом знак неравенства сохраняется: $\frac{11}{36}\pi + \frac{2}{3}\pi n \leq x \leq \frac{17}{36}\pi + \frac{2}{3}\pi n$.



Ответ: $\left(\frac{11}{36}\pi + \frac{2}{3}\pi n; \frac{17}{36}\pi + \frac{2}{3}\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

Пример 2. $\sqrt{3} \cdot \cos^{-2} x < 4 \operatorname{tg} x.$

Решение. Перепишем уравнение следующим образом

$$\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} - \frac{4 \sin x}{\cos x} < 0.$$

Отметим, что $\cos x \neq 0$, т.е. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Далее

$$\frac{\sqrt{3} - 4 \sin x \cos x}{\cos^2 x} < 0, \text{ т.е. } (\sqrt{3} - 2 \sin 2x) \cdot \cos^2 x < 0.$$

Сокращаем на $\cos^2 x \neq 0$ ($\cos^2 x > 0$):

$$\sqrt{3} - 2 \sin 2x < 0, \text{ т.е. } -2 \sin 2x < -\sqrt{3}, \text{ т.е. } \sin 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Отсюда}$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n < 2x < \pi - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ т.е. } \frac{\pi}{3} + 2\pi n < 2x < \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Разделим почленно на 2:

$$\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{\pi}{3} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

Пример 3. $\cos^3 x \cdot \cos 3x - \sin^3 x \cdot \sin 3x > \frac{5}{8}.$

Решение. Проведем следующие преобразования

$$\cos^2 x \cdot \cos x \cdot \cos 3x - \sin^2 x \cdot \sin x \cdot \sin 3x > \frac{5}{8}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \cdot \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) - \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \cdot \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) > \frac{5}{8}, \text{ т.е.}$$

$$(1 + \cos 2x) \cdot (\cos 4x + \cos 2x) - (1 - \cos 2x) \cdot (\cos 2x - \cos 4x) > \frac{5}{2}, \text{ т.е.}$$

$$\cos 4x + \cos 2x + \cos 2x \cos 4x + \cos^2 2x - \cos 2x + \cos 4x + \cos^2 2x - \cos 2x \cos 4x > \frac{5}{2}, \text{ т.е.}$$

$$2 \cos 4x + 2 \cos^2 2x > \frac{5}{2} \Rightarrow 2 \cos 4x + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 4x) > \frac{5}{2}, \text{ т.е.}$$

$$2 \cos 4x + 1 + \cos 4x > \frac{5}{2} \Rightarrow \cos 4x > \frac{1}{2}.$$

По выше приведенной формуле получаем

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < 4x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \text{ или } -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} \right), n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4. $\operatorname{tg}^2 x - (1 + \sqrt{3})\operatorname{tg} x + \sqrt{3} \leq 0.$

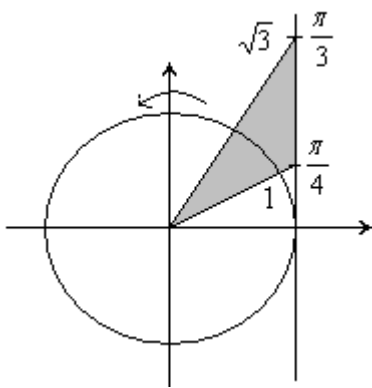
Решение. Введем новую переменную $y = \operatorname{tg} x$ и получим квадратное неравенство $y^2 - (1 + \sqrt{3})y + \sqrt{3} \leq 0$. Это неравенство имеет решение $1 \leq y \leq \sqrt{3}$.

Вернемся к старой неизвестной x и получим: $1 \leq \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}$. На тригонометрическом круге по оси тангенсов отложим значения 1 и $\sqrt{3}$,

построим соответствующие углы $x_1 = \frac{\pi}{4}$ и $x_2 = \frac{\pi}{3}$. Тригонометрическому

неравенству удовлетворяют значения $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$. Учтем периодичность π

функции тангенс и получим: $\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{3} + \pi n$.



$$\text{Ответ: } \left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n \right], n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{3} \sin 2y, \\ \cos x = \sin y. \end{cases}$$

Решение. Возведем оба уравнения в квадрат и сложим полученные уравнения:

$$+ \begin{cases} \sin^2 x = \frac{1}{9} \sin^2 2y, \\ \cos^2 x = \sin^2 y; \end{cases}$$

$$1 = \sin^2 y + \frac{1}{9} \sin^2 2y, 1 - \sin^2 y = \frac{1}{9} \sin^2 2y, \cos^2 y = \frac{1}{9} \cdot 4 \sin^2 y \cos^2 y,$$

$$\cos^2 y \left(1 - \frac{4}{9} \sin^2 y \right) = 0.$$

Так как $|\sin y| \leq 1$, то $1 - \frac{4}{9} \sin^2 y \neq 0$. Следовательно, $\cos^2 y = 0, y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим два случая: k -четное и k -нечетное числа.

1) Если $k = 2n$, то, подставляя $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ в исходную систему, имеем:

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 2\pi l, l \in \mathbb{Z}.$$

2) Если $k = 2n + 1$, то, подставляя $y = \frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi n$ в исходную систему, получаем:

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = -1, \end{cases} \Rightarrow x = \pi + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(2\pi l; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right), \left(\pi + 2\pi l; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right), l \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 6. Решите уравнение для каждого значения параметра a
 $\sin^6 x + \cos^6 x = a$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения как сумму кубов:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x) =$$

$$(\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x) - 3\sin^2 x \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x =$$

$$= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x. \quad \text{Так как } \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad \text{то получим равносильное}$$

$$\text{исходному уравнению } 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = a. \quad \text{Откуда } \sin^2 2x = \frac{4(1-a)}{3}.$$

Если $0 \leq \frac{4(1-a)}{3} \leq 1, \frac{1}{4} \leq a \leq 1$, то уравнение $\sin 2x = \pm \frac{2}{3} \sqrt{3(1-a)}$ имеет решение

$$x = \pm \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{2}{3} \sqrt{3(1-a)} \right) + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

В частности, при $a=1$ решением уравнения $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$ являются числа $x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. Однако это уравнение, как и многие другие, можно решить быстрее, используя неравенства $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$ (см. занятие 27, пример 9).

Пример 7. Решите уравнение для каждого значения параметра a $\operatorname{tg}|x-2| = a$.

Решение.

Очевидно, что $\cos|x-2| \neq 0$, т. е. $|x-2| \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, x \neq 2 \pm \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$. (1)

Решаем исходное уравнение $|x-2| = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Так как $|x-2| \geq 0$, то $\operatorname{arctg} a + \pi n \geq 0$. а) Если $a \geq 0$, то $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

б) Если $a < 0$, то $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Из $|x-2| = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ следует, $x = 2 \pm (\operatorname{arctg} a + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.

Найденное решение удовлетворяет соотношению (1).

Ответ: $2 \pm (\operatorname{arctg} a + \pi n), n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ при $a \geq 0$;

$2 \pm (\operatorname{arctg} a + \pi n), n = 1, 2, 3, 4, \dots$ при $a < 0$.

Пример 8. Решите уравнение для каждого значения параметра a

$$(a-1)\cos x + (a+1)\sin x = 2a.$$

Решение. Запишем уравнение в виде:

$$(a-1)\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right) + (a+1) \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2a\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \cos^2 \frac{x}{2} - a \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} + 2a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2a \cos^2 \frac{x}{2} - 2a \sin^2 \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+1)\cos^2 \frac{x}{2} - 2(a+1)\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + (3a-1)\sin^2 \frac{x}{2} = 0. \quad (2)$$

а) Если $3a-1=0$, т. е. $a = \frac{1}{3}$, то уравнение (2) примет вид:

$$\frac{4}{3}\cos^2 \frac{x}{2} - \frac{8}{3}\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0, \\ \cos \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б) Если $3a-1 \neq 0$, т. е. $a \neq \frac{1}{3}$, то уравнение (2) можно записать в виде:

$$(3a-1)tg^2 \frac{x}{2} - 2(a+1)tg \frac{x}{2} + a+1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} tg \frac{x}{2} = \frac{a+1+\sqrt{2(1-a^2)}}{3a-1}, \\ tg \frac{x}{2} = \frac{a+1-\sqrt{2(1-a^2)}}{3a-1}. \end{cases}$$

Каждое уравнение совокупности имеет решение, если $1-a^2 \geq 0, a^2 \leq 1$,

$$-1 \leq a \leq 1 \left(a \neq \frac{1}{3} \right). \text{ Тогда } x_{1,2} = 2arctg \frac{a+1 \pm \sqrt{2(1-a^2)}}{3a-1} + 2\pi l, l \in Z.$$

Ответ: $\pi + 2\pi n, n \in Z, 2arctg \frac{1}{2} + 2\pi k, k \in Z$ при $a \neq \frac{1}{3}$;

$$2arctg \frac{a+1 \pm \sqrt{2(1-a^2)}}{3a-1} + 2\pi l, l \in Z \text{ при } |a| \leq 1, a \neq \frac{1}{3}.$$

Пример 9. Определите, при каких значениях параметра a система $\begin{cases} \sin|x| - y = 0, \\ |2x| + y = a \end{cases}$

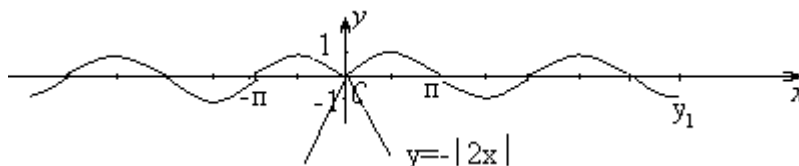
не имеет решений.

Решение. В одной системе координат построим графики функций $y_1 = \sin|x|$

и $y_2 = -|2x| + a$. 1) $y_1 = \sin|x|$ - синусоида, симметричная относительно оси Oy .

2) $y = 2x$ - прямая, проходящая через начало координат;

$$y = |2x| \text{ и } y = -|2x|$$



Если $a=0$, то система имеет одно решение $x=0$.

Если $a>0$, то система имеет два решения, $a<0$ - система не имеет решений.

Задания для самостоятельного решения. №1-№5 стр. 170, №31-№33 стр. 175, №6 стр. 210, №11 стр. 211 [7], №8.394-№8.405 стр. 163-164, №8.494-№8.499 стр. 166-167 [8].

(Урок 30 - 31).

Цель: совершенствование умений и навыков решения тригонометрических уравнений и неравенств, систем тригонометрических уравнений.

Теоретическая часть. При решении тригонометрических уравнений (как и при решении иррациональных или логарифмических уравнений) некоторые преобразования не приводят данное уравнение к равносильному ему уравнению. Например, при возведении обеих частей уравнения в квадрат получается уравнение – следствие данного, т. е. могут появиться посторонние корни. При умножении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное, также могут появиться посторонние корни, а при делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное, может произойти потеря корней. Если в процессе решения уравнения получается уравнение – следствие данного, надо проверить, не появились ли посторонние корни. Потерю корней обнаружить труднее. Поэтому преобразования уравнения, которые могут привести к потере его корней, нужно проводить осторожно.

Посторонние корни при решении тригонометрических уравнений могут появиться, если:

- ✧ уравнение содержит тангенс или котангенс;
- ✧ обе части уравнения умножаются (или делятся) на выражение, содержащее неизвестное;
- ✧ обе части уравнения возводятся в квадрат.

Потеря корней при решении тригонометрических уравнений может произойти, если:

- ✧ обе части уравнения делятся (или умножаются) на выражение, содержащее неизвестное;
- ✧ используются тригонометрические формулы, которые справедливы не при всех значениях неизвестного;
- ✧ при решении системы тригонометрических уравнений для обозначения целого числа в найденных значениях x и y употребляется только одна буква.

Избежать ошибки поможет следующая схема:

1. определяют $\hat{I}\ddot{A}\zeta_1$ (первоначальное допустимое значение x);

2. $\hat{I}\ddot{A}\zeta_2$ (после преобразований), могут быть два случая:

а) $\hat{I}\ddot{A}\zeta_2$ шире $\hat{I}\ddot{A}\zeta_1$, тогда могут быть лишние корни, проверяем их в $\hat{I}\ddot{A}\zeta_1$ и отбрасываем;

б) $\hat{I}\ddot{A}\zeta_2$ уже $\hat{I}\ddot{A}\zeta_1$, тогда произошла потеря корней, берем их из $\hat{I}\ddot{A}\zeta_1$.

Тогда решения, найденные таким образом, совпадают с решениями исходного уравнения.

Учитель делает анализ заданий по тригонометрии централизованного тестирования и ЕГЭ. Тригонометрические уравнения, включенные в ЕГЭ, являются базовыми, соответствующими обязательным требованиям к уровню подготовки выпускников средней школы. Наибольшие затруднения вызывают уравнения смешанного типа, включающие две разные функции, одной из которых является тригонометрическая функция. Этим вопросам будет посвящено несколько уроков.

Рассматриваются вопросы, вызвавшие наибольшее затруднение у учащихся.

Практическая часть. Пример 1. Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\operatorname{ctg}x - 1$.

$$\text{Решение. } \hat{I}\ddot{A}\zeta_1: \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\operatorname{tg}x} - 1 \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}x + 1}{1 - \operatorname{tg}x} = \frac{2}{\operatorname{tg}x} - 1. \hat{I}\ddot{A}\zeta_2: \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \pi p, p \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Произошло сужение: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}x - 2 + 2\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}x - \operatorname{tg}^2 x}{(1 - \operatorname{tg}x)\operatorname{tg}x} = 0 \Rightarrow \frac{4\operatorname{tg}x - 2}{(1 - \operatorname{tg}x)\operatorname{tg}x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4\operatorname{tg}x = 2, \\ (1 - \operatorname{tg}x)\operatorname{tg}x \neq 0. \end{cases}$$

$\operatorname{tg}x = \frac{1}{2}, x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi h, h \in \mathbb{Z}$. Проверяем, подставив в исходное уравнение

промежуточное ограничение $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z}$.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi l + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi l\right) - 1, \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} + \pi l\right) = 2 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi l\right) - 1, -1 = -1 - \text{верное}$$

равенство, следовательно $\frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z}$ - корень уравнения.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z}; \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi h, h \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. $\cos x + \sin x = \cos 2x$.

Решение. $\hat{\mathbb{A}}_1: x \in \mathbb{R}$.

Возведем обе части уравнения в квадрат, получим:

$$(\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 2x \Leftrightarrow \cos^2 x + 2 \cos x \sin x + \sin^2 x = \cos^2 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin 2x - \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 2x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x(\sin 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0, \\ \sin 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Сделаем проверку корней, подставив их в исходное:

1. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. а) k -четное число, т. е. $k=2p, x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi p, p \in \mathbb{Z}$.

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi p\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi p\right) = \cos 2\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi p\right), \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0, 0=0 - \text{верно.}$$

б) k -нечетное число, т. е. $k=2p+1, x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi p + \pi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi p, p \in \mathbb{Z}$.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi p\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi p\right) = \cos 2\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi p\right), -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, 0=0 - \text{верно.}$$

2. $x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. а) $n = 4h, x = 2\pi h, h \in \mathbb{Z}$.

$$\cos 2\pi h + \sin 2\pi h = \cos 4\pi h, 1+0=1, 1=1 - \text{верно.}$$

б) $n = 4h + 1, x = 2\pi h + \frac{\pi}{2}, h \in \mathbb{Z}$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi h\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi h\right) = \cos 2\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi h\right), 1 \neq -1, \text{ следовательно, } 2\pi h + \frac{\pi}{2}, h \in \mathbb{Z} \text{ не}$$

является корнем исходного уравнения.

в) $n = 4h + 2, x = 2\pi h + \pi, h \in \mathbb{Z}$. Также не является корнем исходного уравнения, так как $-1 \neq 1$.

г) $n = 4h + 3, x = 2\pi h + \frac{3\pi}{2}, h \in \mathbb{Z}$.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi h\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi h\right) = \cos 2\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi h\right), \quad -1 = -1 \text{ — верно.}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; 2\pi h + \frac{3\pi}{2}, h \in \mathbb{Z}$.

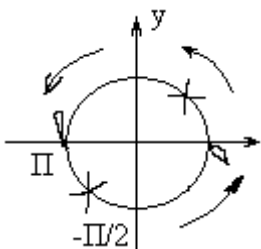
Пример 3. В некоторых заданиях первой части при решении тригонометрических уравнений получаем множество корней, из которых *нужно выбрать* те, которые *принадлежат конкретному промежутку*, и эта часть решения, как правило, вызывает затруднения.

(А) Укажите число корней уравнения $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

$$\text{Решение. } \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0, \\ \operatorname{tg} x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi m, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Изобразим полученные числа на тригонометрическом круге:



Из рисунка видно, что данному промежутку принадлежат только два числа $\frac{\pi}{4}$ и 0. Ответ: 2)

Замечание: можно подставить в выражение $\frac{\pi}{4} + \pi n$ значения n , равные -1; 0; 1,

получить значения x : $-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}$. Из них на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ лежит только

число $\frac{\pi}{4}$. Подставляя в выражение πm значения m , равные -1; 0; 1, получаем

значения x : $-\pi; 0; \pi$. Из них промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ принадлежит только число 0.

Следовательно, на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ лежат только два корня заданного уравнения, то есть номер ответа 2).

Далее рассматриваются примеры, вызвавшие наибольшее затруднение, учащиеся работают группами, затем обмениваются решениями. Учитель оказывает помощь по мере необходимости.

Задания для самостоятельного решения. Учащиеся должны сделать анализ заданий по тригонометрии из сборника [4] для проведения письменного экзамена, разбить все задания части 5 и 6 на группы и привести по одному примеру из каждой группы. Задание учащиеся выполняют либо самостоятельно, либо небольшими группами. В течение недели они могут обращаться за помощью к учителю.

(Урок 32-33).

Цель: контроль знаний, умений и навыков решения тригонометрических уравнений и неравенств, систем тригонометрических уравнений.

Практическая часть. Учащимся даются для самостоятельного решения конкурсные задания, которые предлагались на вступительных экзаменах в вузы нашего города. Главное, решить не все задания, а следить за обоснованиями и выполнением всех шагов решения. За каждое задание учащийся может получить максимум 4 балла (см. критерии оценки выполнения заданий). На следующем занятии учитель сообщает набранные баллы и определяет рейтинг учащихся.

1. Решите уравнение несколькими способами $5\cos x + 12\sin x = 13$,

$$\left[2\arctg \frac{2}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right]$$

2. Решите уравнение $\sqrt{3}\sin x - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x \sin x - \sqrt{3} = 0$,

$$\left[-\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right]$$

3. Решите уравнение $\sin x \left(\cos \frac{x}{4} - 2\sin x \right) + \cos \left(1 + \sin \frac{x}{4} - 2\cos x \right) = 0$,

$$\left[\frac{2\pi}{5} + 8\pi k, k \in \mathbb{Z} \right]$$

4. Решите уравнение для каждого параметра a $\sin(2x+3) = a+1$,

$$\left[a \in [-2; 0], -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n \arcsin(a+1) + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \right]$$

5. Определите количество корней уравнения $\cos x \cdot \operatorname{ctg} x - \sin x = a \cdot \cos 2x$

на отрезке $[0; 2\pi]$,

$$\left[\begin{array}{l} |a| < 1, |a| = \sqrt{2}, \text{òì } 4\hat{\text{e}}\hat{\text{i}}\hat{\text{o}}\hat{\text{i}}\hat{\text{y}} \text{ ; } \hat{\text{a}}\hat{\text{n}}\hat{\text{e}}\hat{\text{e}} \\ |a| = 1, \text{òì } 5\hat{\text{e}}\hat{\text{i}}\hat{\text{o}}\hat{\text{i}}\hat{\text{a}}\hat{\text{e}} \text{ ; } \hat{\text{a}}\hat{\text{n}}\hat{\text{e}}\hat{\text{e}} |a| > 1, |a| \neq \sqrt{2}, \text{òì } 6\hat{\text{e}}\hat{\text{i}}\hat{\text{o}}\hat{\text{i}}\hat{\text{a}}\hat{\text{e}} . \end{array} \right]$$

6. Решите неравенство $|\sin x| \leq \frac{1}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \right], k \in \mathbb{Z}$

7. Решите неравенство $\sin 3x \leq \sin x$,

$$\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi m; 2\pi m \right] \cup \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi m; \frac{3\pi}{4} + 2\pi m \right] \cup \left[\pi + 2\pi m; \frac{5\pi}{4} + 2\pi m \right]$$

8. Найдите значение выражения $\cos(x+y)$, если $\begin{cases} \cos(x-y) = \frac{1}{9}, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{3}. \end{cases} \quad \left[\frac{5}{9} \right]$

Задания для самостоятельного решения.

Задания, которые учащиеся не решали, можно будет выполнить дома и получить дополнительный балл.

(Урок). 34-35)

Цель: подведение итогов работы за год, определение рейтинга каждого учащегося.

Список используемой литературы

1. Алексеев И. Г. Математика. Подготовка к ЕГЭ: Учебно–методическое пособие. – Саратов: Лицей, 2004, 112 с.
2. Бродский И. Л. Решение экзаменационных заданий повышенной сложности по алгебре и началам анализа за курс средней школы: Пособие для учащихся. – М.: АРКТИ, 2001, 72 с. (Методическая библиотека).
3. Виленкин Н. Я. и др. Алгебра: Учебное пособие для 9-10 классов средних школ с математической специализацией.- 2-е изд., М.: «Просвещение», 1972, 302 стр.
4. Дорофеев Г. В., Муравин Г. К., Седова Е. А. Сборник заданий для подготовки и проведения письменного экзамена по математике (курс А) и алгебре и началам анализа (курс Б) за курс средней школы. 11 класс: Экспериментальное пособие. – 4-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2001, 160 с.: ил.
5. Зорин В. В. Пособие по математике для поступающих в вузы. – 2-е изд., М.: «Высшая школа», 1969, 264 с.
6. Перегудов А. Б. и др. Математика. Материалы для подготовки к вступительному компьютерному экзамену в СГТУ: Учебное пособие. Саратов: саратовский гос. Техн. Ун-т, 2004, 88 с.
7. Письменный Д. Т. Готовимся к письменному экзамену по математике. – 5-е изд., испр. и доп.- М.6 Рольф, 1999. – 288 с. с ил.- (Домашний репетитор)
8. Сборник задач по математике для поступающих во втузы: Учебное пособие/ В.К. Егерев и др.; Под ред. М.И. Сканава. – 6-е изд., стер. – М.6 Высш. шк., 1993, 528 с.: ил.
9. Студенечкая В. Н., Гребнева З. С. Решение задач и выполнение заданий с комментариями и ответами для подготовки к единому государственному экзамену. Часть 1.- Волгоград: Учитель, 2003, 105 с.
10. Сухоруков В. И. и др. Математика для поступающих в БГПИ/ сборник конкурсных задач. – Балашов: Издательство БГПИ, 1995, 112 с.

11. Единый Государственный Экзамен по математике (информационный сборник для учителей математики и учащихся общеобразовательных школ). Издательство СарИПКиПРО, 2004, 56 с.

12. Тесты. Математика 11 класс. Варианты и ответы централизованного тестирования. – М.: Центр тестирования МО РФ, 2003.

13. Пособие по математике: Для поступающих в Саратовский государственный социально – экономический университет / Сост. Бабин Ю. Я. И др. – Саратов: СГСЭУ, 2001, 124 с.

14. Рурукин А. Н. Пособие для интенсивной подготовки к выпускному, вступительному экзаменам и ЕГЭ по математике. – М.: ВАКО, 2004, 248с.- (Интенсив).

15. Колягин М. Ю. Алгебра и начала анализа. 10 класс.: Учебник для общеобразовательных учреждений. - М.: Мнемозина, 2001, 364 с.

16. Колягин М. Ю. Математика. Алгебра и элементарные функции. Учебное пособие. Ч. 1.- М.: Агар, 1999, 426 с.

Образовательные диски

- 1.** Математика 5-11 классы. Практикум.
- 2.** Математика 5-11 классы. Практикум. Учебное электронное пособие.
- 3.** Сдаем единый экзамен 2004.

Номера пособий, рекомендуемых учащимся, выделены жирным шрифтом.

Темы сообщений

1. Метод неопределенных коэффициентов и другие способы решения рациональных уравнений [16]
2. Функции и их свойства. Построение графиков функции [14, диск 2]
3. Графический способ решения уравнений и неравенств [диск 1 и 2]
4. Виды текстовых задач и способы их решения [14, диск 1 и 2]
5. Арифметическая и геометрическая прогрессии [14, диск 1 и 2]
6. Преобразование тригонометрических выражений [14, диск 1 и 2]

Темы исследовательских работ

1. Анализ уравнений и неравенств с параметрами, вошедших в сборник заданий для подготовки и проведения письменного экзамена за курс средней школы и рекомендации по их решению.

2. Анализ уровня сложности показательных и логарифмических уравнений, неравенств и систем уравнений, вошедших в сборник заданий для подготовки и проведения письменного экзамена за курс средней школы и рекомендации по их решению.

3. Анализ заданий по тригонометрии разделов 5 и 6, сборника заданий для подготовки и проведения письменного экзамена за курс средней школы и рекомендации по их решению.

Темы сообщений можно дать учащимся в начале учебного года, сообщив им, что по мере прохождения материала они могут готовить отчет по выбранной теме, а защита работ пройдет на итоговом занятии. Учащиеся выбирают тему самостоятельно или объединяются в группы. Формы работ могут быть разных видов: реферат, доклад, публикация, презентация. Знакомятся с требованиями выполнения работ и критериями их оценки.

Приложение 2

Лист учета рейтинга учащегося _____ класса _____ (ф.и.)

№ модуля	1	2	3	4	5	6	7	8	Итого
Осн. балл									
Доп. баллы									
Итог									

Итоговый лист учета рейтинга учащихся 10 _____ класса.

[illegible]